


SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE
RI
TAS

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


Ο ΘΕΟΣ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.
TOME V.
(LXIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Title Page

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,

Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,

Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

JANVIER 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,

à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,

ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e

ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[A4dα]

APERÇU SUR LA THÉORIE DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. VIVANTI.

Archiv der Mathematik und Physik, 3e série, Tome VIII, p. 53.

Traduit de l'allemand, avec l'autorisation de l'auteur. par M. A. BOULANGER.

1. *Introduction.* — Un des traits distinctifs de la Mathématique moderne est la connexion, la pénétration de ses diverses branches, et l'on peut citer comme exemple remarquable de ce fait la théorie de l'équation du cinquième degré, telle qu'elle se présente dans l'Ouvrage classique de F. Klein (1).

Dès que les recherches de Ruffini et d'Abel eurent démontré l'impossibilité d'exprimer les racines d'une

(1) *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Theorie der Gleichungen von fünften Grade.* Leipzig, Teubner, 1884. *Voir* aussi les *Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di 5° grado*, de M. Vivanti (Messine, 1902, lithogr.).

équation générale du cinquième degré sous forme de fonctions algébriques explicites des coefficients, le désir naquit de représenter ces racines par des fonctions transcendantes, aussi simples que possible, des coefficients. La théorie des fonctions elliptiques, qui se développait à cette époque, en fournit le moyen : on trouva que les racines d'une équation générale du cinquième degré sont représentables par des fonctions modulaires elliptiques. Mais, comme les fonctions elliptiques dépendent d'un seul argument, tandis que l'équation générale du cinquième degré renferme cinq coefficients arbitraires, il est évidemment nécessaire de transformer cette équation en une autre qui ne contienne plus qu'un coefficient indéterminé, et l'on y parvient en deux étapes. Tout d'abord, on transforme l'équation générale [éq. (A)] en une *équation principale* [éq. (B)], débarrassée des termes du quatrième et du troisième degré : ceci s'obtient simplement par une extraction de racine carrée. En second lieu, on fait en sorte que les racines de cette équation (B), qui contient trois coefficients indéterminés, dépendent d'une manière connue de deux paramètres et des racines d'une équation à un seul coefficient arbitraire [éq. (C)]; ceci se réalise par des opérations purement algébriques, et l'on peut, si l'équation (A) ou l'équation (B) est donnée, déterminer algébriquement les valeurs correspondantes des deux paramètres et du coefficient de l'équation (C).

Il va de soi que l'équation (C) n'est pas résoluble algébriquement; c'est une équation du soixantième degré qui, pour des motifs qu'on indiquera plus loin, est dite *équation icosaédrique*. Sa résolution se fera au moyen des fonctions modulaires elliptiques.

Nous nous proposons de mettre en relief les points principaux de la théorie de l'équation du cinquième

degré, telle qu'elle vient d'être esquissée, en précisant toutes les notions utilisées, mais sans entrer dans le détail des calculs.

2. *Notions sur les groupes d'opérations.* — Étant donnée une classe d'éléments, d'espèce quelconque, on nomme *opération* tout mode de passage d'un élément à un autre. Le *produit* de plusieurs opérations est le résultat de la succession des passages correspondants. Si les opérations sont identiques, le produit s'appelle une *puissance*. Le produit des deux opérations S et T se désigne par ST, en observant bien que ST et TS ne coïncident pas nécessairement.

Soit un ensemble d'opérations tel que le produit de deux opérations quelconques de l'ensemble appartienne aussi à l'ensemble : on dit que cet ensemble forme un *groupe*. Tout *groupe fini*, c'est-à-dire composé d'un nombre fini d'opérations (nombre qu'on appelle l'*ordre* du groupe), possède les trois propriétés fondamentales suivantes :

1° Il contient l'*opération identique*, c'est-à-dire l'opération par laquelle on passe d'un élément quelconque à cet élément même (cette opération se désigne par S_0 ou par 1).

2° Il contient l'*opération inverse* de chacune de ses opérations, c'est-à-dire qu'à toute opération il en correspond une autre qui, exécutée à la suite de la première, détruit l'effet de celle-ci, leur produit se réduisant à l'opération identique.

3° Chacune de ses opérations est d'ordre fini, l'*ordre* d'une opération S étant le plus petit entier n pour lequel on ait

$$S^n = S_0.$$

Si S est une opération d'ordre n, les opérations

$$1, \quad S, \quad S^2, \quad \ldots, \quad S^{n-1}$$

forment un groupe dit *groupe cyclique*.

Si l'on représente par T^{-1} l'opération inverse de T, l'opération $T^{-1}ST$ se nomme la *transformée de* S *par* T; si, en particulier, TS = ST, auquel cas on dit que S et T sont *permutables*, on a

$$T^{-1}ST = S.$$

L'ensemble des transformées des opérations d'un groupe par une même opération forme aussi un groupe. Un groupe G étant donné, si l'on transforme l'ensemble des opérations d'un de ses *sous-groupes* I (c'est-à-dire d'un groupe I contenu dans G) par une même opération de G, on obtient un autre sous-groupe I' de G, qui est dit *équivalent* à I et qui peut, en particulier, coïncider avec I. Si ce dernier cas se présente quand on procède à la transformation par chacune des opérations de G, on dit que I est un sous-groupe *distingué* ou *invariant* de G. Lorsqu'un groupe ne contient aucun sous-groupe distingué (à part lui-même et le groupe formé de la seule opération identique), on dit que ce groupe est *simple*; dans le cas contraire, on dit qu'il est *composé*.

Quand on peut associer à toute opération d'un groupe G une opération d'un autre groupe G' de telle sorte que, S et S', T et T' étant des opérations correspondantes quelconques, ST et S'T' se correspondent, on dit que G' est *isomorphe* à G; cet isomorphisme est *holoédrique* ou *mériédrique* selon que les éléments de G' correspondant à des éléments distincts de G sont entièrement distincts ou non.

Dans le second cas, le système des éléments de G,

auxquels correspond dans G′ l'opération identique, forme un sous-groupe invariant de G, dont l'ordre est le quotient des ordres des deux groupes. L'isomorphisme mériédrique ne peut dès lors se présenter que si G est composé.

3. *Groupes finis de substitutions linéaires.* — Les notions qu'on vient de présenter et dont la portée est considérable trouvent une application particulièrement importante pour nous dans la théorie des substitutions linéaires d'une variable complexe.

Une *substitution linéaire* est l'opération par laquelle on passe d'une valeur arbitraire z à une autre valeur z' liée à z par l'équation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

où α, β, γ, δ sont des constantes réelles ou complexes satisfaisant à l'inégalité $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. La substitution (1) se désigne quelquefois par le symbole $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$.

$\alpha\delta - \beta\gamma$ s'appelle le *déterminant* de la substitution. L'opération inverse de la substitution linéaire (1), c'est-à-dire l'opération qui déduit z de z', est aussi une substitution linéaire; en effet

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}.$$

L'opération identique peut être regardée comme une substitution linéaire (1) où $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Le produit de deux substitutions linéaires est une substitution linéaire.

D'après ce qu'on a vu, il est clair que les substitutions linéaires forment un groupe (infini) qui possède les propriétés 1° et 2°.

Une substitution linéaire laisse inaltérées deux valeurs de z, distinctes ou confondues, qui sont les racines de l'équation du second degré

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0,$$

et qui sont dites les *pôles* de la substitution ([1]).

Une substitution à deux pôles distincts p, q peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad \frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

θ étant une constante. Si le module de la constante θ est l'unité, la substitution est dite *elliptique;* si θ est réelle, elle est dite *hyperbolique;* dans tous les autres cas, elle est dite *loxodromique*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution (2) soit d'ordre fini est que cette substitution soit elliptique et que θ soit une racine de l'unité.

Une substitution à pôle unique r est dite *parabolique;* elle peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r},$$

η étant une constante. Une substitution parabolique ne saurait être d'ordre fini.

Il suit de là qu'un groupe fini ne peut être formé que de substitutions elliptiques à constantes θ racines de l'unité.

Il peut arriver que plusieurs substitutions d'un groupe fini aient un pôle commun; elles ont alors aussi le second pôle commun et forment un sous-groupe cyclique. Le sous-groupe transformé de celui-ci par une substitu-

---

([1]) Exception faite de la substitution identique, pour laquelle toute valeur de z peut être regardée comme pôle.

tion T du groupe est aussi cyclique et admet pour pôles les valeurs en lesquelles les pôles précédents sont changés par la substitution T. Les pôles des deux sous-groupes équivalents sont dits *équivalents*.

Si n est l'ordre d'un groupe, et si p est un pôle commun à $(\nu - 1)$ substitutions du groupe (l'identité exceptée), ν est un diviseur de n et p appartient à un système de $\frac{n}{\nu}$ pôles équivalents. Entre n et les diverses valeurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ de ν, il existe la relation importante

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}.$$

En s'appuyant sur cette relation, on peut déterminer de la manière la plus aisée tous les groupes finis *possibles* de substitutions linéaires. Tout d'abord on reconnaît que r ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3. Ensuite on obtient comme seules solutions possibles de l'équation précédente les solutions indiquées dans le Tableau ci-après, où m et n désignent des entiers positifs arbitraires :

(3)

	r.	ν_1.	ν_2.	ν_3.	n.
I.....	2	n	n		n
II....	3	2	2	m	$2m$
III...	3	2	3	3	12
IV....	3	2	3	4	24
V.....	3	2	3	5	60

4. *Représentation géométrique des substitutions linéaires sur le plan et sur la sphère. Groupes de rotations.* — Si l'on associe à tout nombre complexe

$z = x + iy$ le point de coordonnées cartésiennes x, y, la substitution

(4) $$z' = f(z)$$

représente une *transformation du plan en lui-même*, c'est-à-dire une transformation qui fait correspondre à tout point du plan un autre point généralement distinct du premier. Quelle particularité cette transformation présente-t-elle quand la substitution (4) a la forme (1)?

Tout d'abord, en laissant de côté le cas de la substitution identique, il n'y a qu'un ou deux points qui se transforment en eux-mêmes : ce sont les pôles de la substitution. Bornons-nous au cas d'une substitution elliptique dont les pôles soient p et q. Étant alors donné un point arbitraire z, on peut déterminer un cercle unique passant par z, ayant son centre sur la droite pq, et par rapport auquel les points p et q soient conjugués; le point transformé z' se trouve sur ce cercle, et les segments de cercles pzq, $pz'q$ se rencontrent en p et q sous un angle constant (qui est l'argument de θ). Si, en particulier, un des pôles, par exemple q, est à l'infini, on obtient le cercle passant par z et ayant p pour centre, tandis que les segments de cercles susmentionnés deviennent les droites pz et pz'.

Mais on obtient la représentation la plus claire de cette transformation en passant du plan à la surface de la sphère. Si l'on choisit, en effet, d'une manière convenable, la sphère et le centre de projection, le système des cercles du plan, dont les centres sont sur pq et par rapport auxquels p et q sont conjugués, se transforme, par projection stéréographique [1], en un système de

---

[1] Une projection stéréographique est la perspective d'un plan sur une surface sphérique, le point de vue étant une extrémité du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan. Elle possède les

cercles parallèles dont les pôles sont les projections p' et q' des points p et q; une substitution linéaire sera alors représentée par une rotation de la sphère, ayant pour axe le diamètre $p'q'$ et pour amplitude l'argument de θ.

D'après cela, à chaque groupe de substitutions linéaires correspond un groupe de rotations d'une sphère sur elle-même. Mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est que, à tous les groupes finis de substitutions reconnus *possibles*, correspondent des groupes de rotations *existant réellement*.

Considérons un polyèdre régulier et la sphère qui lui est circonscrite. Soient ab, cd deux arêtes quelconques du polyèdre : ab peut être amené, par une rotation de la sphère sur elle-même, en coïncidence avec cd ou avec dc. Toutes ces rotations, dont le nombre (en comprenant la rotation d'amplitude nulle qui laisse la figure immobile) est double du nombre des arêtes du polyèdre, superposent le polyèdre à lui-même; et aucune autre rotation ne possède la même propriété; elles forment évidemment un groupe. A chaque polyèdre régulier correspond ainsi un groupe de rotations. Mais les groupes obtenus ne sont pas tous distincts; car toute rotation qui superpose un polyèdre à lui-même superpose aussi à lui-même le polyèdre polaire, c'est-à-dire le polyèdre dont les sommets sont les centres sphériques des faces du premier. Par suite, aux polyèdres réguliers ne correspondent que trois groupes distincts, à savoir le *groupe tétraédrique*, le *groupe octaédrique* ou *hexaédrique* et le *groupe icosaédrique* ou *dodécaédrique*.

---

deux propriétés fondamentales suivantes :

1° La grandeur des angles est conservée par la projection;

2° Les cercles et les droites sont transformés en cercles.

Des groupes finis plus généraux de rotations s'obtiennent de la manière suivante.

On peut regarder un polygone régulier inscrit dans un grand cercle de la sphère comme un polyèdre régulier limité par deux plans superposés (*dièdre*); les rotations qui superposent cette figure à elle-même forment un groupe, le *groupe du dièdre*, dont l'ordre est double du nombre des côtés du polygone. Si, en particulier, le polygone se réduit à un diamètre, compté deux fois, du grand cercle, le groupe du dièdre correspondant est d'ordre 4 et s'appelle *Vierergruppe*.

Enfin, il y a encore des groupes de rotations tout simples, à savoir les *groupes cycliques*, engendrés par une rotation d'amplitude égale à un sous-multiple de 2π et par les puissances de cette rotation.

On peut établir que les groupes cycliques, les groupes du dièdre et les groupes tétraédrique, octaédrique et icosaédrique sont la représentation sphérique des groupes de substitutions I, II, III, IV et V du Tableau (3).

Tout d'abord, en effet, un groupe cyclique de rotations est formé de n rotations ayant les deux mêmes pôles, et chacun de ces pôles n'est équivalent qu'à lui-même; dès lors, on a

$$r = 2, \qquad \frac{n}{\nu_1} = 1, \qquad \frac{n}{\nu_2} = 1;$$

d'où

$$\nu_1 = \nu_2 = n$$

[*cf.* Tableau (3), I].

Considérons dorénavant, en même temps que chaque polyèdre régulier, la division déterminée sur la sphère circonscrite par les perspectives de ses arêtes vues du centre de la sphère, et appelons cette configuration un

polyèdre sphérique. Ainsi, par exemple, le *dièdre sphérique* a pour faces deux hémisphères, pour sommets m points équidistants répartis sur leur grand cercle commun; pour arêtes les m arcs en lesquels ce cercle sera partagé par les points choisis. Chaque rotation d'un groupe polyédrique superpose à lui-même le polyèdre sphérique correspondant.

Commençons par le dièdre; le groupe qui lui est relatif est formé des rotations suivantes : une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour du diamètre perpendiculaire au plan du polygone et les puissances de cette rotation; m rotations de π autour des axes de symétrie du polygone. L'ordre du groupe est ainsi $n = 2m$, et l'on a trois sortes de pôles équivalents : les m sommets $\left(\frac{n}{\nu_1} = m\right)$, les points milieux des côtés $\left(\frac{n}{\nu_2} = m\right)$, les centres des deux faces $\left(\frac{n}{\nu_3} = 2\right)$. On a, par suite,

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 2, \qquad \nu_3 = m$$

[*cf.* Tableau (3), II].

Considérons maintenant à la fois le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre qui possèdent la propriété commune d'avoir pour faces des triangles égaux. Divisons chaque face du polyèdre sphérique correspondant par ses médianes en 6 triangles rectangles alternativement égaux et symétriques; comme 4 de ces triangles sont contigus à chaque arête, le nombre total de ces triangles est quadruple du nombre des arêtes, soit $2n$. Le nombre des faces est, par suite, $\frac{n}{3}$; il en résulte que l'on a respectivement, dans les trois cas, $n = 12$, 24, 60. De plus, d'après le théorème d'Euler relatif aux po-

lyèdres ([1]), le nombre des sommets est $\frac{n+12}{6}$, soit 4, 6, 12, comme on le sait.

Chacun des triangles considérés a pour sommets le milieu d'une arête, le centre d'une face et un sommet du polyèdre sphérique; les angles correspondants sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{q}$, où $q = \frac{6n}{n+12}$, soit 3, 4, 5 ([2]).

Les rotations qui superposent le polyèdre à lui-même sont les mêmes que celles qui amènent un triangle quelconque en superposition avec tous les triangles égaux, soit :

1° La rotation nulle;

2° Les rotations d'amplitude π autour des diamètres

([1]) Si A, F, S sont les nombres des arêtes, des faces et des sommets d'un polyèdre, le théorème d'Euler dit que

$$F + S = A + 2;$$

dans notre cas,

$$A = \frac{n}{2}, \qquad F = \frac{n}{3}; \qquad \text{donc} \qquad S = \frac{n}{2} - \frac{n}{3} + 2 = \frac{n+12}{6}.$$

([2]) Autour du milieu d'une arête sont répartis 4 triangles et, autour du centre d'une face, 6 triangles; en sorte que les angles correspondants sont $\frac{2\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. Pour déterminer le troisième angle, nous appliquerons le théorème de Lhuillier d'après lequel la surface d'un triangle sphérique est égale à l'excès sur π de la somme de ses angles. La surface de la sphère étant décomposée en $2n$ triangles équivalents, si l'on désigne par $\frac{\pi}{q}$ l'angle à déterminer, on a

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{q} - \pi = \frac{4\pi}{2n}; \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{6n}{n+12}.$$

D'après cela, le nombre des sommets du polyèdre peut être représenté par $\frac{n}{q}$.

passant par les milieux des arêtes opposées deux à deux (*médianes*) : leur nombre est $\frac{n}{4}$ et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{2}$ pôles équivalents;

3° Les rotations d'amplitudes $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour des diamètres passant par les centres des faces opposées deux à deux; leur nombre est $2\frac{n}{6}$ ou $\frac{n}{3}$, et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{3}$ pôles équivalents;

4° Les rotations d'amplitudes $\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \ldots, \frac{2(q-1)\pi}{q}$ autour des diagonales du polyèdre; leur nombre est

$$(q-1)\frac{n}{2q} = \frac{5n-12}{12},$$

et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{q}$ pôles équivalents.

Le groupe ne contient pas d'autres rotations, car la somme des nombres des rotations 1°, 2°, 3°, 4° est précisément égale à n.

Ainsi, il y a trois et seulement trois systèmes de pôles équivalents ($r = 3$), et l'on a

$$\frac{n}{\nu_1} = \frac{n}{2}, \qquad \frac{n}{\nu_2} = \frac{n}{3}, \qquad \frac{n}{\nu_3} = \frac{n}{q};$$

d'où il suit que

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 3, \qquad \nu_3 = q = 3,\ 4,\ 5$$

[*cf.* Tableau (3), III, IV, V].

Si nous voulons pénétrer un peu plus profondément dans la nature des groupes de rotations trouvés, nous pouvons nous demander s'ils sont simples ou composés.

Un groupe cyclique est simple si son ordre est un nombre premier et alors seulement.

Un groupe du dièdre dont l'ordre est $n = 2m$ contient un groupe cyclique comme sous-groupe invariant, à savoir le groupe des rotations autour du diamètre perpendiculaire au plan du polygone.

Le groupe tétraédrique contient, comme sous-groupe invariant, le *Vierergruppe* constitué par la rotation nulle et les trois rotations 2°.

Le groupe octaédrique contient, comme sous-groupe invariant, le groupe tétraédrique qui superpose à lui-même le tétraèdre formé par les centres de quatre faces non contiguës de l'octaèdre.

Le groupe icosaédrique est, au contraire, simple.

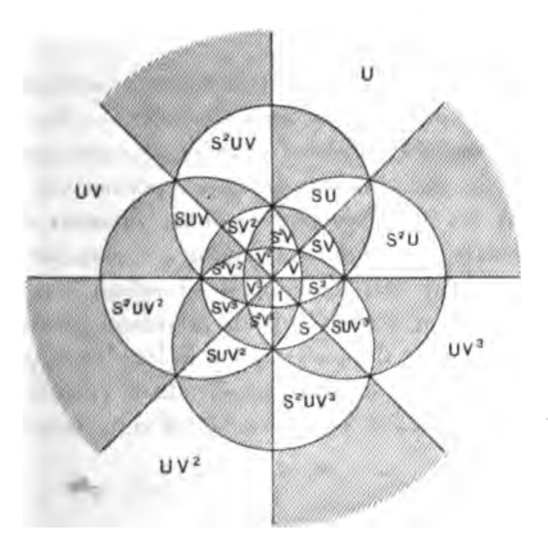
On peut, toutefois, mentionner ici des sous-groupes, bien entendu non distingués, du groupe icosaédrique. Les 15 médianes de l'icosaèdre forment 5 trièdres orthogonaux, qui se superposent l'un à l'autre par rotations autour de diagonales; parmi les 60 rotations icosaédriques, il y en a 12 qui superposent à lui-même un trièdre orthogonal déterminé de médianes; ces rotations forment un groupe tétraédrique. On obtient ainsi 5 sous-groupes tétraédriques *équivalents* qui sont transformés l'un dans l'autre par des rotations autour de diagonales.

5. *Représentation plane des groupes finis de rotations.* — Tout en présentant une égale facilité, l'étude des groupes de rotations que nous venons de trouver est pourtant plus avantageuse à faire avec des figures planes qu'avec des figures sphériques. Pour ce passage, il nous suffira de projeter stéréographiquement les figures sphériques sur le plan.

La remarque suivante peut faciliter la projection

pour les trois polyèdres considérés (tétraèdre, octaèdre, icosaèdre) : les arêtes et les médianes relatives à un même polyèdre sphérique forment par leur réunion des grands cercles complets, au nombre de 6, 9 et 15 respectivement pour les trois cas.

Comme par projection les cercles se changent en cercles ou droites, la figure plane sera constituée dans les trois cas par 6, 9 ou 15 cercles ou droites. Nous



donnons ici comme exemple l'image de l'octaèdre [1]. Les triangles du réseau obtenu sont alternativement hachurés et non hachurés, de telle sorte que les triangles hachurés sont égaux entre eux et symétriques des triangles blancs, en convenant de qualifier d'*égales* ou de *symétriques* les images planes de triangles sphériques égaux ou symétriques. Le réseau entier est ainsi engendrable par reproduction directe et par reproduc-

(1) Les symboles marqués sur la figure seront expliqués plus loin.

Le triangle blanc désigné par 1 sur la figure et le triangle hachuré contigu à celui-là, le long d'un côté de l'angle droit, forment, par leur réunion, un *domaine fondamental,* c'est-à-dire un domaine contenant un et un seul point homologue de chaque point du plan (en supposant, il est vrai, que la moitié du périmètre du domaine soit regardée comme appartenant au domaine); on entend là par *points homologues* les points qui se transforment l'un en l'autre par les substitutions du groupe. Chaque point du plan appartient à un système de n points homologues; exception est faite seulement pour les nœuds du réseau de triangles qui se répartissent en trois systèmes de $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$ et $\frac{n}{\nu_3}$ points homologues.

7. *Groupes linéaires et formes invariantes.* — Il convient maintenant, pour la commodité, d'introduire des variables homogènes. Si l'on pose

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \qquad z' = \frac{z'_1}{z'_2},$$

la substitution linéaire fractionnaire à une variable (1) se change en une substitution linéaire entière à deux variables :

$$(5) \qquad z'_1 = \alpha z_1 + \beta z_2, \qquad z'_2 = \gamma z_1 + \delta z_2.$$

Mais il est à observer qu'à une même substitution (1) correspondent une infinité de substitutions (5), à savoir toutes les substitutions de la forme

$$z'_1 = k(\alpha z_1 + \beta z_2), \qquad z'_2 = k(\gamma z_1 + \delta z_2),$$

où k est arbitraire; si l'on s'impose maintenant que le déterminant de la substitution soit égal à l'unité, à

toute substitution (1), où il est loisible de supposer

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

correspondent seulement deux substitutions (1), soit

$$z'_1 = \pm(\alpha z_1 + \beta z_2), \qquad z'_2 = \pm(\gamma z_1 + \delta z_2).$$

D'après cela, à un groupe de substitutions non homogènes d'ordre n correspond un groupe de substitutions homogènes d'ordre $2n$.

Soit maintenant une forme, c'est-à-dire une fonction entière homogène des deux variables z_1, z_2, qui s'annule en n points homologues. Si on la soumet à une substitution quelconque du groupe considéré, ses zéros sont simplement permutés entre eux; par suite la forme se reproduit à un facteur constant près. Une telle forme s'appelle une *forme fondamentale invariante;* toute *forme invariante,* c'est-à-dire toute forme qui se reproduit par toutes les substitutions du groupe, est exprimable par un produit de formes fondamentales invariantes. Des considérations particulières font connaître les formes fondamentales Φ_1, Φ_2, Φ_3 qui ont pour zéros respectifs les trois systèmes de nœuds homologues. Comme ces points équivalent à des zéros ν_1^{uples}, ν_2^{uples}, ν_3^{uples}, Φ_i est la puissance $\nu_i^{\text{ième}}$ d'une forme F_i d'ordre $\frac{n}{\nu_i}$. Entre les trois formes $F_i^{\nu_i}$ il existe dans chaque cas une relation linéaire homogène

$$(6) \qquad \mu_1 F_1^{\nu_1} + \mu_2 F_2^{\nu_2} + \mu_3 F_3^{\nu_3} = 0;$$

et toute forme fondamentale est exprimable par une fonction linéaire homogène de ces trois formes.

On va donner, pour chacun des trois groupes polyédriques, les formes F_i ainsi que l'identité (6) qui les lie; dans ce Tableau, les formes F_1 s'annulent aux

milieux des arêtes, les formes F_2 aux centres des faces et les formes F_3 aux sommets du polyèdre correspondant.

Groupe tétraédrique :

$$F_1 = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) \qquad = t,$$
$$F_2 = z_1^4 + 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Phi,$$
$$F_3 = z_1^4 - 2i\sqrt{3}\, z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Psi,$$
$$12 i\sqrt{3}\, t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Groupe octaédrique :

$$F_1 = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} = \chi,$$
$$F_2 = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8 = \Phi\Psi = W,$$
$$F_3 = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,$$
$$\chi^2 - W^3 + 108 t^4 = 0.$$

Groupe icosaédrique :

$$F_1 = z_1^{30} + 522 z_1^{25} z_2^5 - 10005 z_1^{20} z_2^{10} - 10005 z_1^{10} z_2^{20} - 522 z_1^5 z_2^{25} + z_2^{30} = T,$$
$$F_2 = - z_1^{20} + 228 z_1^{15} z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10} - 228 z_1^5 z_2^{15} - z_2^{20} = H,$$
$$F_3 = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) = f,$$
$$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0.$$

Si l'on pose

$$(7) \qquad Z = -\frac{\mu_2 F_2^{\nu_2}}{\mu_3 F_3^{\nu_3}},$$

on a, en vertu de (6),

$$Z - 1 = \frac{\mu_1 F_1^{\nu_1}}{\mu_3 F_3^{\nu_3}},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{Z-1}{\mu_1 F_1^{\nu_1}} = \frac{Z}{-\mu_2 F_2^{\nu_2}} = \frac{1}{\mu_3 F_3^{\nu_3}};$$

Z est une fonction de z qui a la même valeur aux points

homologues et en eux seulement; elle prend au milieu des arêtes, aux centres des faces et aux sommets respectivement les valeurs 1, 0, ∞. De plus, toute fonction rationnelle de z qui a toujours la même valeur en des points homologues est une fonction rationnelle de Z.

L'équation (7) sera dans les trois cas :

$$Z = \frac{\Phi^2}{\Psi^2}, \qquad Z = \frac{W^3}{108\,t^4}, \qquad Z = \frac{H^3}{1728 f^5}.$$

8. *Groupe d'une équation algébrique. Résolvantes.* — Il nous faut intercaler ici quelques considérations algébriques.

Soit une équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré

$$(8) \qquad f(x) = 0,$$

dont nous désignerons les racines par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Les coefficients de l'équation sont des fonctions symétriques connues des racines, et toute fonction rationnelle symétrique des racines est une fonction rationnelle des coefficients, ou, comme on dit, est *rationnellement connue*. Mais il peut arriver dans des cas particuliers que d'autres fonctions rationnelles non symétriques des racines soient aussi rationnellement connues, ou que nous voulions regarder de telles fonctions comme rationnellement connues. L'ensemble des permutations des racines qui laissent ces fonctions invariantes forme évidemment un groupe G, qu'on nomme le *groupe de l'équation* (8). Comme G est un sous-groupe du groupe formé par la totalité des permutations possibles des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont l'ordre est $m!$, l'ordre n de G est un diviseur de $m!$

Considérons maintenant une fonction non ration-

nellement connue des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$y = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

et désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ les diverses valeurs qu'elle prend quand on soumet $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ à toutes les permutations du groupe G. Soit

$$(9) \qquad \varphi(y) = 0$$

l'équation dont les racines sont $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$; les coefficients de $\varphi(y)$ sont rationnellement connus, et par suite la formation de l'équation (9) peut être effectuée par des opérations purement rationnelles. D'autre part, la résolution de (9) nous ferait faire un pas en avant dans le problème de la résolution de (8), en ce sens qu'il nous serait permis de regarder comme connue une fonction des racines de (8) qui, auparavant, n'était pas rationnellement connue, et de prendre pour groupe de l'équation non plus G, mais le sous-groupe G' de G qui laisse invariante la fonction y. Pour cette raison, l'équation (9) est dite une *résolvante* de (8). Le groupe H de (9) est isomorphe au groupe G, et l'ordre de G' est le quotient des ordres de G et de H. Si l'isomorphisme est holoédrique, G' se réduit à l'identité, et nous pouvons, si (9) est regardée comme résolue, considérer comme rationnellement connue toute fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ qui n'admet aucune permutation, l'identité exceptée, et en particulier les quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ elles-mêmes. La résolution de (8) et celle de (9) sont alors des problèmes équivalents : (9) sera dite une *résolvante équivalente* de (8), et (8) peut aussi inversement être regardée comme une résolvante de (9). Si, au contraire, l'isomorphisme est mériédrique, la résolution de (9) n'est qu'une première étape pour la résolution de (8). Mais ce second cas ne peut

se présenter (*voir* n° 1) que si le groupe G est composé; si G est simple, on ne saurait espérer obtenir une résolvante non équivalente de l'équation donnée.

Un intérêt particulier s'attache à la *résolvante de Galois*, c'est-à-dire à la résolvante équivalente qui a pour racine une fonction linéaire des α_i à coefficients absolument distincts :

$$y = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_m \alpha_m.$$

Si l'on effectue sur les racines α_i toutes les permutations du groupe G, les fonctions symétriques des valeurs obtenues pour y sont évidemment rationnellement connues; par suite l'ordre de la résolvante de Galois est n. La résolvante de Galois est irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne saurait aucunement se décomposer en facteurs à coefficients rationnellement connus. Ses racines sont des fonctions rationnelles de l'une d'elles; en d'autres termes l'équation se transforme en elle-même par n substitutions :

$$y' = y, \quad y' = \theta_1(y), \quad y' = \theta_2(y), \quad \ldots, \quad y' = \theta_{n-1}(y),$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ désignant des fonctions rationnelles de y. Ces substitutions forment un groupe qui est holoédriquement isomorphe au groupe de la résolvante, et qui peut donc être considéré tout aussi bien comme son groupe.

Réciproquement, si une équation irréductible de degré n se transforme en elle-même par n substitutions rationnelles, elle est sa propre résolvante et le groupe formé par ces substitutions ne peut être pris comme groupe de l'équation.

9. *Application aux équations polyédriques. Résolvante équivalente de l'équation icosaédrique.* — Après

cette digression, revenons à notre question principale. Écrivons l'équation (7) ainsi

$$(10) \qquad F(z) = Z.$$

Si l'on soumet z à une substitution quelconque du groupe correspondant

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

on obtient à nouveau, z et z' étant homologues l'un de l'autre :

$$F(z') = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = Z.$$

Ainsi, les racines de l'équation (10) sont des fonctions rationnelles, voire linéaires, de l'une d'elles, et l'équation se transforme en elle-même par n substitutions linéaires. Il suit de là que l'équation (10) peut être considérée comme sa propre résolvante de Galois, et que le groupe de substitutions correspondant peut être pris comme groupe de l'équation.

Comme les groupes tétraédrique et octaédrique sont composés, le problème de la résolution des équations correspondantes se simplifie par la formation des résolvantes. Mais il n'en va plus de même pour l'équation icosaédrique, parce que le groupe associé est simple. Néanmoins la recherche des résolvantes, nécessairement équivalentes, de l'équation icosaédrique est du plus haut intérêt. Une importance particulière s'attache à une résolvante du cinquième ordre qui provient de la considération des cinq sous-groupes tétraédriques équivalents, déjà signalés, du groupe icosaédrique. Si l'on forme, en effet, une fonction Y de z qui admette toutes les substitutions d'un de ces sous-groupes, cette fonction ne prendra, par les soixante substitutions du groupe

icosaédrique, que cinq valeurs distinctes; les fonctions symétriques de ces valeurs sont des fonctions rationnelles de Z, et par suite Y est racine d'une équation du cinquième degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de Z. Le trièdre orthogonal de médianes qui est transformé en lui-même par les substitutions du sous-groupe considéré peut être regardé comme le système des diagonales d'un octaèdre; désignons par t et W, suivant les notations précédemment employées, les formes relatives à cet octaèdre, par m et n deux constantes arbitraires; posons

$$u = \frac{12 f^2 t}{T}, \qquad v = \frac{12 f W}{H},$$

en sorte que u et v sont des fonctions homogènes de degré zéro de z_1 et z_2, soit des fonctions de z; la fonction

$$Y = mv + nuv$$

satisfait à l'équation du cinquième ordre

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & Y^5 + \frac{5}{Z}\left(8m^3 + 12m^2 n + \frac{6}{1-Z} mn^2 + \frac{1}{1-Z} n^3\right) Y^2 \\ & \quad + \frac{15}{Z}\left(-4m^4 + \frac{6}{1-Z} m^2 n^2 + \frac{4}{1-Z} mn^3 + \frac{3}{4(1-Z)^2} n^4\right) Y \\ & \quad + \frac{3}{Z}\left(48m^5 - \frac{40}{1-Z} m^3 n^2 + \frac{15}{(1-Z)^2} mn^4 + \frac{1}{(1-Z)^2} n^5\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

où il faut remarquer l'absence des termes en Y^4 et en Y^3. C'est une *équation principale*, qui est dite la *résolvante principale* de l'équation icosaédrique. La racine carrée du discriminant de (11) s'exprime rationnellement au moyen de m, n, Z.

10. ***Propriété des équations principales du cinquième degré.*** — Comme l'équation (11) est une résol-

vante équivalente de l'équation icosaédrique, on peut aussi inversement regarder l'équation icosaédrique comme une résolvante de (11). Ce fait peut recevoir une forme géométrique élégante.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes d'un point de l'espace; si l'on pose

$$x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 s'appellent les *coordonnées pentaédriques* du point considéré. Entre les coordonnées pentaédriques d'un point quelconque, on a l'identité

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0.$$

Soit maintenant

(12) $$x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0$$

une équation principale du cinquième ordre, et désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 ses racines; à cause de l'absence des termes en x^4 et en x^3, on a

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{5} \xi_i^2 = 0.$$

Il suit de là d'abord que les cinq racines de (12) prises dans un ordre quelconque peuvent être regardées comme les coordonnées pentasphériques d'un point; ensuite que les 120 points

(13) $$x_1 = \xi_{h_1}, \quad x_2 = \xi_{h_2}, \quad x_3 = \xi_{h_3}, \quad x_4 = \xi_{h_4}, \quad x_5 = \xi_{h_5},$$

où $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ désigne une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, sont situés sur la surface du second ordre

(14) $$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0.$$

Chacune des 120 transformations linéaires de l'espace en lui-même (*collinéations*)

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1 = x'_{h_1}, & x_2 = x'_{h_2}, \quad x_3 = x'_{h_3}, \\ & x_4 = x'_{h_4}, \quad x_5 = x'_{h_5} \end{cases}$$

permute les uns dans les autres ces 120 points, et transforme la surface (14) en elle-même; et il arrive qu'une collinéation (15) laisse invariants les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface (14) ou permute l'un dans l'autre ces deux systèmes selon que la permutation correspondante $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ est paire ou impaire.

Désignons par λ le paramètre de la génératrice rectiligne d'un système passant par le point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de la quadrique (14); λ est une fonction linéaire fractionnaire des coordonnées x_i. Aux 60 collinéations qui transforment en lui-même chaque système de génératrices correspondent 60 substitutions linéaires fractionnaires; ces substitutions font passer de λ aux paramètres des génératrices du même système qui passent par 60 des 120 points (13), le point initial compris; et l'on peut, par le choix convenable du paramètre λ, faire en sorte que ces 60 substitutions linéaires forment un groupe icosaédrique; d'où il suit que l'équation dont les racines sont les 60 valeurs de λ est une équation icosaédrique.

11. *Résolution des équations du cinquième degré.* — D'après cela, si une équation principale du cinquième degré (12) est donnée, on est assuré de la possibilité de la regarder comme la résolvante principale d'une équation icosaédrique et par suite de ramener sa résolution à celle de cette dernière. Pour obtenir effec-

tivement l'équation icosaédrique, identifions (12) et (11); nous aurons

$$\frac{1}{Z}\left(8m^3 + 12m^2n + \frac{6}{1-Z}mn^2 + \frac{1}{1-Z}n^3\right) = \alpha.$$

$$\frac{3}{Z}\left(-4m^4 + \frac{6}{1-Z}m^2n^2 + \frac{4}{1-Z}mn^3 + \frac{3}{4(1-Z)^2}n^4\right) = \beta,$$

$$\frac{3}{Z}\left(48m^5 - \frac{40}{1-Z}m^3n^2 + \frac{15}{(1-Z)^2}mn^4 + \frac{4}{(1-Z)^2}n^5\right) = \gamma.$$

Par un traitement approprié de ces équations, on arrive à exprimer m, n et Z par des fonctions rationnelles de α, β, γ, ∇, ∇^2 désignant le discriminant de l'équation (12).

En résumé, pour résoudre l'équation proposée (12), nous procéderons donc de la manière suivante :

1° Nous déterminerons m, n, Z comme fonctions rationnelles de α, β, γ, ∇;

2° Nous résoudrons l'équation icosaédrique

$$(16) \qquad \frac{H^3(z)}{1728\, f^5(z)} = Z,$$

où Z représente la valeur que nous venons de trouver;

3° Si enfin z est une racine de l'équation (16), la valeur

$$x = m\, u(z) + n\, u(z)\, v(z),$$

où m et n désignent les valeurs trouvées plus haut, est une racine de (12).

La résolution d'une équation principale du cinquième ordre est dès lors ramenée à une extraction de racine carrée (pour le calcul de ∇) et à la résolution d'une équation icosaédrique.

Mais si l'on a affaire à une équation *générale* du cinquième ordre, il est encore besoin d'une extraction de racine pour ramener cette équation à la forme principale.

D'après cela, la transition des équations de degrés 2, 3 et 4 aux équations de degré 5 est très nettement caractérisée. Tandis que la résolution des premières est réductible à de simples radicaux, c'est-à-dire est réductible à la résolution d'équations binomes, la résolution des dernières est seulement réductible à la résolution d'une équation d'un type spécial, de l'équation icosaédrique.

Maintenant se pose d'elle-même la question de savoir s'il y a aussi des équations de degré plus élevé, dont la résolution est réductible à celle d'équations binomes et icosaédriques.

Nous nous bornerons à la signaler.

12. *Résolution de l'équation icosaédrique au moyen de la fonction hypergéométrique.* — Il nous faut maintenant consacrer quelques mots à la résolution de l'équation icosaédrique, en abandonnant le point de vue algébrique.

Désignons par z une fonction de la variable Z, par z', z'', z''' ses dérivées première, deuxième, troisième; considérons l'expression

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = [z]$$

comme fonction de Z; elle conserve sa forme si l'on remplace z par une fonction linéaire fractionnaire de z. Si, en particulier, z est lié à Z par l'équation

polyédrique

$$F(z) = Z,$$

Z conserve sa *valeur* si l'on effectue sur z une substitution linéaire appartenant au groupe correspondant; par suite, la valeur de $[z]$ reste aussi inaltérée par une telle substitution. Si l'on observe en outre qu'entre $[z]$ et Z il existe une relation algébrique, on peut en conclure que $[z]$ est une fonction rationnelle de Z. La forme de cette fonction se détermine par des considérations analytiques; on obtient

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} [z] = {} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_1^2}\right)\frac{1}{(Z-1)^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_2^2}\right)\frac{1}{Z^2} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_3^2} - 1\right)\frac{1}{Z(Z-1)}, \end{aligned} \right.$$

où ν_1, ν_2, ν_3 ont la même signification que plus haut.

Cette équation différentielle du troisième ordre est en relation étroite avec l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre :

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} & y'' + \frac{1}{Z}y' + \frac{1}{4Z^2(Z-1)^2} \\ & \times \left[-\frac{1}{\nu_2^2} + \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} + 1\right)Z - \frac{1}{\nu_3^2}Z^2\right] y = 0; \end{aligned} \right.$$

une intégrale de (17) est en effet le quotient de deux intégrales indépendantes de (18).

Or l'équation (18) rentre dans le type connu des *équations différentielles de Riemann* dont les intégrales s'expriment au moyen des *séries hypergéométriques*. z est donc exprimable en fonction de Z à l'aide de fonctions hypergéométriques de Z.

13. *Aperçu de la résolution de l'équation icosaédrique au moyen des fonctions elliptiques.* — Pour

développer une seconde méthode de résolution, il nous faut présenter quelques préliminaires. Comme nous l'avons vu, à chaque équation polyédrique correspond un réseau plan régulier, constitué par un nombre fini de triangles formés d'arcs de cercle. Si l'on fait abstraction de la condition que le nombre des triangles soit fini, on peut, de tout tel triangle curviligne à angles sous-multiples de 2π (l'angle nul compris), déduire par reproduction et par symétrie alternées (*voir* n° 5, *in fine*) un certain réseau.

A chaque réseau correspond une équation

$$F(z) = Z$$

(transcendante dans le cas d'un réseau infini) qui associe à toute valeur de Z un système de valeurs de z, qui sont toutes des fonctions linéaires fractionnaires de l'une d'elles; les substitutions linéaires correspondantes forment un groupe qui transforme l'équation en elle-même. Considérons donc deux tels réseaux à angles $\frac{2\pi}{\nu_i}$, $\frac{2\pi}{\nu'_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, et soient

$$F(z) = Z,$$
$$G(z') = Z$$

les équations correspondantes; si en outre ν_1 est un multiple de ν'_1, ν_2 de ν'_2, ν_3 de ν'_3, z' est une fonction uniforme de z.

Cela posé, désignons par J l'invariant absolu, par ω le rapport des périodes d'une intégrale elliptique de première espèce; on sait que J est une fonction uniforme de ω :

$$(19) \qquad J = J(\omega).$$

L'équation (19) (*équation modulaire*) se transforme en elle-même par toute substitution linéaire à coefficients entiers ; ces substitutions forment un groupe dit *groupe modulaire*, et l'on a pour le réseau correspondant

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 3, \qquad \nu_3 = \infty.$$

Observons d'autre part que pour les équations polyédriques

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 3, \qquad \nu_3 = 3,\ 4,\ 5,$$

et nous pourrons en conclure que si l'on désigne par $Z = F(z)$ une équation polyédrique, par $Z = J(\omega)$ l'équation modulaire, z sera une fonction uniforme de ω.

Quant à la formation effective de cette fonction uniforme, c'est une question que nous n'aborderons pas ici.

[D6b]

SUR UNE FORMULE POUR LE CALCUL NUMÉRIQUE DES LOGARITHMES ;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

Je me propose de donner ici une formule pour le calcul des valeurs des logarithmes des nombres, laquelle me paraît pouvoir être utile en quelques circonstances.

Je considère, pour cela, la fonction rationnelle

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n}$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \ldots + \frac{A_n}{t^n}$$
$$+ \frac{B_1}{t-a} + \frac{B_2}{(t-a)^2} + \frac{B_3}{(t-a)^3} + \ldots + \frac{B_n}{(t-a)^n}.$$

Pour déterminer $A_1, A_2, \ldots, A_n$, je développe le binome $(h-a)^{-n}$ en série ordonnée suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(h-a)^{-n} = \frac{(-1)^n}{a^n}\Big[1 + \binom{n}{1}\frac{h}{a}$$
$$+ \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} + \binom{n+2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots$$
$$+ \binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\Big].$$

On a donc

$$A_1 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$
$$A_2 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2},$$
$$A_3 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{n-2} = \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2},$$
$$A_{n-1} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1},$$
$$A_n = \frac{(-1)^n}{a^n}.$$

Pour déterminer $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, on doit poser $t = a + h$ dans la fraction $\frac{1}{t^n}$, et développer le résultat

suivant les puissances de h, ce qui donne

$$(a+h)^{-n}$$
$$= \frac{1}{a^n}\left[1 - \binom{n}{1}\frac{h}{a} + \binom{n+1}{2}\frac{h^2}{a^2} - \binom{n-2}{3}\frac{h^3}{a^3} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots\right];$$

par conséquent

$$B_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$
$$B_2 = \frac{(-1)^{n-2}}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2},$$
$$B_3 = \frac{(-1)^{n-3}}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$B_{n-2} = \frac{(-1)^2}{a^{n+2}}\binom{n+1}{2},$$
$$B_{n-1} = \frac{(-1)}{a^{n+1}}\binom{n}{1},$$
$$B^n = \frac{1}{a^n}.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n} = \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-a}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t-a)^2}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t-a)^3}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{t^{n-2}} + (-)^{n-2}\frac{1}{(t-a)^{n-2}}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n}{1}\left(\frac{1}{t^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{(t-a)^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{a^n}\left(\frac{1}{t^n} + (-1)^n\frac{1}{(t-a)^n}\right).$$

En intégrant maintenant les deux membres de cette

identité et en prenant l'intégrale entre les limites x et ∞, on trouve, en supposant $x > a > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}\\
&\quad= \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}\log\frac{x-a}{x}\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{a^{2n-2}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}\right)\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{a^{2n-3}}\binom{2n-4}{n-3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{a^{n+2}}\binom{n+1}{n}\frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{x^{n-3}}+(-1)^{n-2}\frac{1}{(x-a)^{n-3}}\right)\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\binom{n}{1}\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-2}}\right)\\
&\qquad+\frac{(-1)^n}{a^n}\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+(-1)^n\frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right),
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\log\frac{x}{x-a}\\
&= a\,\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}\right)\\
&\quad+\frac{a^2}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)\\
&\quad+\frac{a^3}{3}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x-a)^3}\right)\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{a^{n-2}}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-2}}\right)\\
&\quad+\frac{a^{n-1}}{n-1}\,\frac{(n-2)(n-3)\ldots2.1}{(2n-1)(2n-2)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+(-1)^n\frac{1}{(x-a)^{n-1}}\right)\\
&\quad-(-1)^n a^{2n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\int_x^\infty\frac{dt}{t^n(t-a)^n}.
\end{aligned}$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n} < \frac{1}{x^n}\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n},$$

et, par suite, en représentant par R_n le dernier terme de l'égalité précédente,

$$R_n = a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}$$

$$< a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}}.$$

On voit, au moyen de cette inégalité, que R_n tend vers *zéro* quand n tend vers l'infini, si $x \geqq 2a$; et, dans ce cas, on peut donc écrire

$$\log x - \log(x-a)$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[a\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}\right)\right.$$

$$+\frac{a^2}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)$$

$$+\frac{a^3}{2}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x-a)^3}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{a^{n-2}}{n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-a)^{n-2}}\right)$$

$$\left.+\frac{a^{n-1}}{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-a)^{n-1}}\right)\right].$$

Cette formule, que nous croyons nouvelle, sans en être certain, est celle que nous nous proposions de démontrer. Elle donne la valeur de la différence entre les logarithmes des nombres x et $x-a$ avec une

erreur inférieure à

$$a^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}},$$

et peut être principalement utile quand le nombre représenté par a est petit et le nombre représenté par x est grand.

En posant $a=1$, on trouve la formule

$$\begin{aligned}\log x - \log(x-1) = \lim_{n=\infty}\Big[&\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\\ &+\frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{1}{n-2}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right)\\ &+\frac{1}{n-1}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n-1}}\right)\Big]\end{aligned}$$

qui donne la valeur de la différence des logarithmes des deux nombres consécutifs x et $x-1$ avec une erreur inférieure à

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^n(x-1)^{n-1}},$$

et qui a lieu quand $x \overline{>} 2$.

On déduit, comme corollaire de cette formule, que la différence des logarithmes des nombres x et $x-1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2.10^3}$, quand $x>10$, à $\frac{1}{2.10^6}$, quand $x>100$, à $\frac{1}{2.10^9}$, quand $x>1000$, etc.

On voit, de la même manière, que la différence des logarithmes des nombres x et $x-1$ peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{12.10^5}$, quand $x>10$, à $\frac{1}{12.10^{10}}$, quand $x>100$, etc.

Parmi les formules qui résultent de la formule générale précédemment écrite, nous indiquerons encore la suivante

$$\log\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\lim_{n=\infty}\left[2\frac{n-1}{2n-2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\right.$$
$$+\frac{2^2}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$
$$+\frac{2^3}{3}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x-1)^3}\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{2^{n-2}}{n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots3.2}{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}}\right)$$
$$\left.+\frac{2^{n-1}}{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\left(\frac{1}{(x+1)^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n-1}}\right)\right]$$

qu'on obtient en y remplaçant x par $x+1$ et en posant $a=x$.

Cette formule a lieu quand $x>3$ et donne $\log\frac{x+1}{x-1}$ avec une erreur inférieure à

$$2^{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\ldots2.1}{(2n-2)(2n-3)\ldots n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x+1)^n(x-1)^{n-1}}.$$

[X4c]

SUR L'ÉVALUATION GRAPHIQUE DES LONGUEURS D'ARCS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Les procédés de l'intégration graphique, appliqués soit la règle à la main, soit au moyen d'un intégraphe, permettent d'obtenir les aires limitées à des contours fermés quelconques. Pour évaluer approximativement une intégrale quelconque par ce moyen, il faut donc la ramener à une détermination d'aire. En ce qui concerne les longueurs d'arcs, M. Collignon a fait connaître la solution suivante (¹) :

On a, entre les points M_1 et M_2, α désignant l'angle de la tangente avec Ox, N la normale limitée à Ox, a une longueur quelconque,

$$s = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dx}{\cos\alpha} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{N}{y}\,dx = \frac{1}{a}\int_{M_1}^{M_2} \frac{aN}{y}\,dx.$$

Or, si l'on porte sur la normale la longueur $MN = a$, et si l'on élève en N à cette normale la perpendiculaire NP, on a précisément

$$\frac{aN}{y} = MP.$$

Donc

$$s = \frac{1}{a}\int_{M_1}^{M_2} MP\,dx = \frac{\text{aire } M_1M_2P_2P_1}{a}.$$

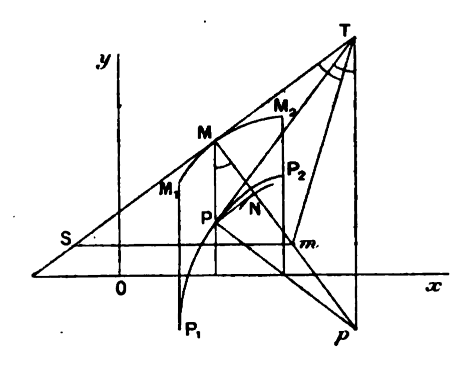
Si donc on évalue graphiquement cette aire par la méthode de M. Massau, en prenant pour base de l'inté-

(¹) *Complément du Cours d'Analyse*, p. 17.

gration la longueur a, on voit que l'ordonnée finalement obtenue sera précisément égale à la longueur de l'arc $M_1 M_2$.

Pour effectuer ce tracé avec plus de précision, il est utile d'obtenir, en même temps que chaque point P de la courbe auxiliaire $P_1 P_2$, la tangente en ce point. Voici comment on peut établir la construction de cette tangente :

Le segment MN de la normale étant constant, le point N décrit une courbe parallèle à la courbe $M_1 M_2$,



dont la tangente en N est justement NP, et qui a même centre de courbure m que $M_1 M_2$.

Dès lors, si la tangente et la normale en P à la courbe $P_1 P_2$ coupent respectivement en T et en p la tangente et la normale en M à la courbe $M_1 M_2$, on a, entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M, N, P,

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{N})} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{N}m}, \qquad \frac{d(\mathrm{N})}{d(\mathrm{P})} = \frac{\mathrm{N}m}{\mathrm{P}p}, \qquad \frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{MT}};$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$1 = \frac{\mathrm{M}m.\mathrm{PT}}{\mathrm{P}p.\mathrm{MT}}$$

ou

$$\frac{Pp}{PT} = \frac{Mm}{MT},$$

ce qui montre que

$$\widehat{MTm} = \widehat{PTp}.$$

Mais le quadrilatère pPMT étant inscrit dans le cercle de diamètre pT, on a

$$\widehat{PTp} = \widehat{PMp}.$$

Menons par le centre de courbure m la parallèle mS à Ox. Nous avons

$$\widehat{PMm} = \widehat{MSm}.$$

Donc, finalement,

$$\widehat{MTm} = \widehat{MSm},$$

et les points S et T sont symétriques par rapport au point M. Ainsi :

La tangente PT *cherchée et la parallèle à* Ox *menée par le centre de courbure* m *coupent la tangente en* M *en deux points symétriques par rapport à* M.

Si les points S et T sont en dehors des limites de l'épure, il suffit de mener par m une droite dont la direction soit symétrique par rapport à mM de celle de Ox et de joindre, par un des procédés bien connus, le point P au point de rencontre inaccessible de cette droite et de la tangente en M.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Transmission par courroies. On étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Calcul des tensions;*

2° *Place à donner au volant dans les différents cas;*

3° *Graphique des tensions dans le cas d'une machine à vapeur (dont le couple présente les variations ordinaires), actionnant une dynamo (dont le couple résistant est constant).*

On négligera le glissement élastique de la courroie et le frottement des tourillons.

ÉPREUVES PRATIQUES. — I. *Déterminer les efforts intérieurs dans les barres d'une poutre Warren horizontale chargée sur les deux semelles et appuyée à ses extrémités.*

II. *Déterminer, à l'aide de l'intégrateur d'Amsler :*

1° *Le poids par mètre courant d'un rail de profil donné;*

2° *Le centre de gravité du profil;*

3° *Le module d'inertie.* (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie du régulateur. On supposera que l'on a établi les équations d'équilibre, et l'on traitera* SEULEMENT *les questions suivantes : Interprétation graphique des équations d'équilibre. Sensibilité. Puissance. Notion d'isochronisme.*

ÉPREUVES PRATIQUES. — I. *Épure des efforts intérieurs dans les barres d'une poutre Pratt à* N *inférieur.*

II. *Déterminer, à l'aide de l'intégrateur d'Amsler, l'ellipse d'inertie principale de la section droite d'un fer cornière donné.* (Novembre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étudier, dans le cas d'une automobile à chaînes, le mode d'action des ressorts comme organes*

de transmission, de manière à montrer les diverses dispositions à donner aux mains et aux jumelles suivant que les roues sont porteuses ou motrices.

On rappellera au début la disposition des diverses réactions sur une roue motrice et sur une roue porteuse; on ne traitera pas le cas d'une roue frénée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une voiture automobile devant peser en ordre de marche* 1500^{kg}. *Le moteur fait* 800 *tours à la minute en marche normale, et l'on admet que le couple moteur moyen conserve sa valeur entre* 600 *et* 1000 *tours. Le rendement* ρ *du mécanisme de transmission est* 0,70. *Les mécanismes de changement de vitesse sont disposés de façon que, le moteur marchant à* 800 *tours, la voiture fasse :*

	km
En première vitesse	12
» deuxième vitesse..........	24
» troisième vitesse	36
» quatrième vitesse.........	50

I. *Déterminer quelle puissance doit avoir le moteur pour que l'on puisse atteindre cette vitesse de* 50^{km} *à l'heure en palier et calculer les pentes* i_2 *et* i_3 *que l'on peut monter dans ces conditions à vitesse constante en deuxième et en troisième vitesse.*

II. *Déterminer deux angles* x *et* y *tels que l'on puisse monter en troisième vitesse une pente comprise entre* $i_3 - x$ *et* $i_3 + y$ *sans que la vitesse du moteur s'élève au-dessus de* 1000 *tours ou s'abaisse au-dessous de* 600 *tours.*

N. B. — *On rappelle la formule*

$$\mathcal{F} = P(0,025 + 0,0003\,V) + 0,005\,SV^2$$

que l'on supposera toujours applicable dans les conditions de vitesse réalisées, avec $S = 2^{m^2}$.

(Juillet 1904.)

Besançon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Les théorèmes de Faraday et la fonction de Green; influence exercée par un point électrisé sur un conducteur limité par deux sphères.*

II. *Poutre mi-appuyée, mi-encastrée sur deux appuis de niveau.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse bat la seconde; l'amplitude de l'oscillation est réduite de moitié en une heure, calculer l'amortissement.* (Novembre 1903.)

QUESTIONS.

2005. On considère en un point M d'une ellipse les deux normales obliques sous l'angle α.

1° Les produits des distances des foyers à chacune de ces normales sont les mêmes.

2° La somme de ces produits en deux points conjugués M et M' de l'ellipse est constante. (E.-N. BARISIEN.)

2006. Soit m un nombre impair positif quelconque. Formons la suite

$$[\sqrt{m}],\quad [\sqrt{2m}],\quad \ldots,\quad [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant, suivant l'usage, par $[x]$ le nombre entier défini par

$$x - 1 < [x] \leqq x.$$

1° Dans la suite ainsi obtenue, il ne peut y avoir plus de deux termes égaux.

2° La même suite, au contraire, contient des couples de termes égaux, et le nombre de ces couples est $\left[\frac{m}{4}\right]$.

Exemple. — Pour $m = 9$, la suite est la suivante

$$3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 6,\quad 7,\quad 7,\quad 8,$$

et elle contient $2 = \left[\frac{9}{4}\right]$ couples de termes égaux.

(R. BRICARD.)

COMBEROUSSE (Charles de), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. — **Cours de Mathématiques**, à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 4 volumes in-8 (23 × 14), avec figures, se vendant séparément :

TOME Ier. — *Arithmétique* et *Algèbre élémentaire* avec 38 figures. 4e édition; 1900 .... 10 fr.

On vend séparément :

Arithmétique .... 4 fr.
Algèbre élémentaire .... 6 fr.

TOME II. — *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace. — Trigonométrie rectiligne et sphérique* avec 543 fig. 3e éd.; 1893. 13 fr.

On vend séparément :

Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace .... 8 fr.
Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles .... 5 fr.

TOME III. — *Algèbre supérieure*, Ire Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire (Déterminants, fonctions continues, etc.). — Combinaisons. — Séries. — Étude des Fonctions. — Dérivées et différentielles. Premiers principes du Calcul intégral.* 3e édition; XXI-767 pages avec 20 figures; 1904 .... 15 fr.

TOME IV. — *Algèbre supérieure*, IIe Partie : *Étude des imaginaires. Théorie générale des Équations*. 2e édition; XXXIV-831 pages, avec 63 figures; 1890 .... 15 fr.

LAISANT (C.-A.), Député, Docteur ès Sciences, Ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Théorie et applications des Equipollences**. In-8, avec 73 figures; 1887 .... 7 fr. 50 c.

LAISANT (C.-A.), Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Introduction à la méthode des quaternions**. In-8, avec figures; 1881 .... 6 fr.

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité d'Algèbre supérieure**. Ouvrage traduit de l'anglais par O. CHEMIN, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École nationale des Ponts et Chaussées. 2e édition française, publiée d'après la quatrième édition anglaise. In-8; 1890 .... 10 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles spéciales. 7e édition, revue et mise en harmonie avec les derniers programmes officiels, par **J.-A. SERRET** et par **Ch. de COMBEROUSSE**, Professeur de Cinématique à l'École Centrale et de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. In-8; 1887. (*Autorisé par décision ministérielle.*)

Broché .... 4 fr. 50 c. | Cartonné .... 5 fr. 25 c.

TABLE DES MATIÈRES.

Janvier 1905.

Pages.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,

Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,

Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(61e VOLUME DE LA COLLECTION.)

FÉVRIER 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,

à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,

ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,

ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. BOURLET.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. ÉT. DELASSUS. — Bordeaux : M. PADÉ. — Caen : M. A. DE SAINT-GERMAIN. — Clermont-Ferrand : M. C. GUICHARD. — Dijon : M. DUPORT. — Grenoble : M. J. COLLET. — Lille : M. BOULANGER. — Lyon : M. L. AUTONNE. — Marseille : M. SAUVAGE. — Montpellier : M. E. FABRY. — Nancy : M. H. VOGT. — Paris : M. RAFFY. — Poitiers : M. MAILLARD. — Rennes : M. LE ROUX. — Toulouse : M. COSSERAT.



[illegible]

1822-1901

CHARLES HERMITE (¹);

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,
Membre de l'Institut.

Avec M. Hermite disparait une des gloires les plus pures qui aient jamais illustré la Science française. M. Hermite ne fut pas seulement un des plus grands mathématiciens du dernier siècle : sa vie fut un exemple; personne n'a poussé plus loin l'amour désintéressé de la Science, le dédain de la notoriété. Les sévères régions de la pensée dont il avait fait son domaine, leurs harmonieuses et rigides beautés, les lois rigoureuses et éternelles qui les régissent, lui avaient donné des joies trop hautes pour qu'il pût condescendre encore aux soucis dont s'agitent la plupart des hommes. A ce puissant génie visionnaire, le mystérieux univers du *nombre* n'apparaissait point comme dépourvu d'existence objective, mais bien comme une sorte d'armature immatérielle et inflexible de l'univers réel dont elle contient les déréglements. Ceux qui ont eu l'heureuse fortune d'être les élèves du grand géomètre ne sauraient oublier l'accent presque religieux de son enseignement, le frisson de beauté ou de mystère qu'il faisait passer à travers son auditoire devant quelque admirable découverte ou devant l'inconnu. Hermite fut un professeur incomparable : sa parole saisissante ouvrait brusquement de larges horizons sur les régions de la Science, elle suggérait à la curiosité et à l'invention

---

(¹) Extrait de *La Nature*, numéro du 2 février 1901.

les problèmes nouveaux et essentiels; mais surtout elle communiquait l'amour et le respect des idéales vérités. Dans l'inoubliable journée de son jubilé, en accueillant l'hommage d'admiration de tous les pays civilisés, l'illustre analyste parla, en termes pleins de noblesse, de la corrélation étroite et secrète qui existe *entre le sentiment absolu de la justice et du devoir et l'intelligence des vérités absolues de la Géométrie*. Cette corrélation semblait évidente quand on écoutait ses leçons.

Dès ses premiers travaux, se manifeste la qualité maîtresse d'Hermite : la profondeur. Il ne s'est jamais dispersé en recherches superficielles ou vagues. Une question lui apparaissait toujours sous une forme extrêmement précise : il en pénétrait les secrets les plus cachés, il y portait une telle lumière que toutes les questions du même type se trouvaient du coup résolues. Élève de première année à l'École Polytechnique, âgé de 20 ans à peine, il ne craint pas d'écrire à Jacobi sur la division des transcendantes abéliennes : pour comprendre l'audace d'une telle tentative, il faut se rappeler qu'en 1843 l'existence des nouvelles transcendantes était à peine démontrée et qu'elles étaient ignorées de la plupart des analystes; leur acte de naissance, pour ainsi dire, n'était pas encore enregistré par la Science. Jacobi accueillit avec admiration et sympathie ce premier effort où se révélait un jeune et vigoureux génie. Quelques années plus tard, un Mémoire sur la transformation des mêmes transcendantes classait définitivement Hermite parmi les grands mathématiciens. Le Mémoire, où la théorie des fonctions se mêle à l'Arithmétique et à l'Algèbre, est en quelque sorte *représentatif* de l'œuvre d'Hermite. Nul n'a montré, d'une façon plus éclatante, par ses méthodes et ses découvertes,

les relations intimes qui unissent ces trois branches de la Science, l'appui mutuel qu'elles peuvent et doivent se prêter. C'est ainsi que la théorie des *formes algébriques,* dont il est un des créateurs avec Cayley et Sylvester, lui sert à la résolution de l'équation du cinquième degré et à l'étude des *formes arithmétiques.* De même, c'est par l'introduction des variables continues en arithmétique qu'il parvient aux admirables propriétés des *formes quadratiques* dont la découverte égale les plus belles découvertes de Gauss ; c'est notamment la transformation des fonctions algébriques qui lui donne le nombre de *classes*. Ce sont enfin les équations modulaires qui le conduisent à la résolution de l'équation du cinquième degré. Pendant des années, il rivalise avec Kronecker pour déduire de la théorie des fonctions elliptiques les plus riches conséquences arithmétiques.

Inversement, par l'arithmétique, il pénètre profondément dans la théorie des fonctions ; l'étude des groupes discontinus lui livre les propriétés de la fonction modulaire. C'est cette même étude qui devait engendrer plus tard les fonctions *automorphes* à une ou plusieurs variables (fonctions fuchsiennes, hyperfuchsiennes, hyperabéliennes, etc.), dont la découverte est une des plus précieuses conquêtes des Mathématiques contemporaines.

Dans le domaine de l'Analyse proprement dite, il a renouvelé la théorie des intégrales eulériennes, créé la théorie de l'équation de Lamé, dont les applications à la Mécanique, à l'Astronomie, à la Physique mathématique sont si nombreuses.

Est-il besoin de rappeler enfin la belle formule de décomposition en éléments simples (d'après leurs infinis) des fonctions trigonométriques et elliptiques.

formule qui livre la fonction toute prête pour l'intégration comme une fraction rationnelle décomposée en éléments simples?

Mais la découverte d'Hermite qui surpasse toutes les autres, c'est la démonstration de la *transcendance* du nombre e, démonstration qui, à peine modifiée, entraîne la transcendance du nombre π, c'est-à-dire l'impossibilité du fameux problème de la *quadrature du cercle*. Les nombres algébriques (nombres définis par une relation algébrique à coefficients rationnels) forment une classe si dense qu'il semblait presque impossible de trouver un critérium assez subtil pour permettre de discerner si un nombre tel que e ou π est algébrique ou transcendant. Ce critérium, c'est dans la théorie généralisée des fractions continues qu'Hermite a su le découvrir, et sa méthode sera admirée tant que des hommes existeront capables de comprendre la notion du nombre.

La carrière d'Hermite est connue de tous les hommes de science. Né en Lorraine, à Dieuze, le 24 décembre 1822, membre de l'Académie des Sciences en 1856, maître de conférences à l'École Normale de 1862 à 1869, professeur à l'École Polytechnique en 1867, professeur d'Algèbre supérieure à la Sorbonne en 1869, il a occupé cette dernière chaire jusqu'en 1897. Son cours d'Analyse de l'École Polytechnique, dont le premier Volume seulement a été publié, est un chef-d'œuvre de profondeur et de concision. Les quinze dernières années de son enseignement à la Sorbonne ont été consacrées à la Théorie des fonctions analytiques d'après Weierstrass : mais au lieu de s'attacher étroitement, comme l'illustre analyste allemand, à l'unique méthode des séries entières, Hermite a fait appel à toutes les ressources des méthodes de Cauchy, donnant

ainsi à la doctrine une brièveté et une élégance incomparables. C'est dans le Cours autographié d'Hermite, remanié à fond chaque année, que toute la jeune école des mathématiciens français a appris l'analyse. On peut dire que, dans le propre domaine de Weierstrass, l'enseignement d'Hermite a suscité peut-être plus de travaux que l'enseignement de Weierstrass lui-même.

Parmi les mathématiciens de tous les temps, il en est peu qui aient exercé une influence directe comparable à celle d'Hermite; il n'en est pas dont l'œuvre soit plus sûrement impérissable.

[M²1b]

POINTS MULTIPLES DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. LANCELOT.

Nous ne nous sommes, jusqu'ici, occupés que des points simples, c'est-à-dire des points de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

pour lesquels les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas toutes trois nulles.

Points doubles. — Supposons que, pour un point M de la surface, les trois dérivées partielles s'annulent. L'équation aux λ des points d'intersection de la surface et d'une droite passant par M est alors

$$\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = $$

et elle a toujours au moins une racine double nulle. Toute droite passant par M y coupe la surface en deux points confondus.

Supposons que le coefficient de λ^2 ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire que les six dérivées partielles du second ordre f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{zx} ne soient pas toutes nulles. En général deux points seulement de l'intersection seront confondus en M : le point M est dit *point double*.

Un troisième point viendra se confondre avec les deux premiers, si l'on prend une droite dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

Une telle droite est dite *tangente à la surface du point double* M, et y coupe la surface en trois points confondus. En un point double, il y a donc une infinité de tangentes formant un cône du second degré, ayant pour équation

$$\begin{aligned}(X - x)^2 f''_{x^2} + (Y - y)^2 f''_{y^2} + (Z - z)^2 f''_{z^2}&\\ + 2(X - x)(Y - y) f''_{xy}&\\ + 2(Y - y)(Z - z) f''_{zx} + 2(Z - z)(X - x) f''_{zx} &= 0.\end{aligned}$$

Divers cas sont à considérer suivant la nature de ce cône. Soit, en général, un cône du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Décomposons cette forme quadratique en une somme de carrés. Il vient

$$\frac{1}{A}(A^2x^2 + 2AB''xy + 2AB'xz + B''^2y^2 + B'^2z^2 + 2B'B''yz) + \left(A' - \frac{B''^2}{A}\right)y^2 + 2\left(B - \frac{B'B''}{A}\right)yz + \left(A'' - \frac{B'^2}{A}\right)z^2$$

ou

$$\frac{1}{A}[(Ax + B''y + B'z)^2 + a''y^2 + a'z^2 + 2byz],$$

les petites lettres désignant les mineurs des éléments correspondants du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Achevons la décomposition en carrés, il vient

$$\frac{1}{A}\left[(Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y + bz)^2 + \left(a' - \frac{b^2}{a''}\right)z^2\right];$$

le coefficient de z^2 est $\dfrac{a'a'' - b^2}{a''}$ ou, d'après un théorème connu sur les déterminants adjoints, $\dfrac{\Delta A}{a''}$. On a donc

$$\frac{1}{A}\left((Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y + bz)^2 + \frac{\Delta A}{a''}z^2\right).$$

Pour que le cône soit imaginaire, il faut et il suffit que les trois carrés soient de même signe, ou que

$$a'' > 0, \qquad \Delta A > 0.$$

En opérant la décomposition dans un autre ordre (en commençant par d'autres variables), on aurait trouvé :

1° En commençant par x, et continuant par y d'abord, puis par z,

$$a'' > 0, \qquad \Delta A > 0,$$
$$a' > 0, \qquad \Delta A > 0;$$

2° En commençant par y, et continuant par z, puis par x,

$$a > 0, \qquad \Delta A' > 0,$$
$$a'' > 0, \qquad \Delta A' > 0;$$

3° En commençant par z, et continuant par x, puis par y,

$$a' > 0, \qquad \Delta A'' > 0,$$
$$a > 0, \qquad \Delta A'' > 0.$$

Donc, si le cône est imaginaire, a, a', a'' sont positifs; et Δ, A, A', A'' sont de même signe.

Je dis que les conditions $a > o$, $a' > o$ entraînent toutes les autres, car elles s'écrivent

$$A'A'' - B^2 > o, \qquad A''A - B'^2 > o,$$

et, B^2 et B'^2 étant positifs, entraînent

$$A'A'' > o, \qquad A''A > o.$$

Mais

$$A'A'' > B^2, \qquad AA'' > B'^2.$$

Multiplions

$$AA'A''^2 > B^2B'^2.$$

Donc AA' est positif; et A, A', A'' sont de même signe.

Je dis que a'' est positif. En effet,

$$a'' = AA' - B''^2;$$

or

$$AA' > \frac{B^2B'^2}{A''^2},$$

d'où

$$AA' - B''^2 > \frac{B^2B'^2 - B''^2A''^2}{A''^2},$$

et il faut montrer que

$$B^2B'^2 - B''^2A''^2 > o;$$

or,

$$A'' > \frac{B^2}{A'}, \qquad A'' > \frac{B'^2}{A},$$

d'où

$$A''^2 > \frac{B^2B'^2}{AA'}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$B^2B'^2 - \frac{B''^2B^2B'^2}{AA'} > o;$$

or ceci équivaut, AA' étant positif, à l'inégalité supposée :

$$AA' - B''^2 > 0.$$

Donc a'' est positif.

Enfin, on sait que

$$\Delta A = a'a'' - b^2, \qquad \Delta A' = a''a - b'^2, \qquad \Delta A'' = aa' - b''^2,$$

d'où

$$\Delta^2 AA' = (a'a'' - b^2)(a''a - b'^2)$$

et ainsi de suite. Les produits AA' étant positifs, les quantités $(a'a'' - b^2)$, ... sont toutes de même signe. Comme (déterminants adjoints)

$$\Delta^2 a = (a'a'' - b^2)$$

et que a est positif, elles sont toutes trois positives, et ΔA est positif.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le cône du second degré soit imaginaire sont que deux des trois mineurs a, a', a'' soient positifs : le troisième l'est alors aussi.

Le cône des tangentes en un point double sera donc :

1° Imaginaire si les trois mineurs de $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}$ dans le déterminant des dérivées secondes sont positifs ; ce déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix},$$

et le cône sera imaginaire si

$$f''_{y^2}f''_{z^2} - f''^2_{yz} > 0, \qquad f''_{z^2}f''_{x^2} - f''^2_{zx} > 0, \qquad f''_{x^2}f''_{y^2} - f''^2_{xy} > 0;$$

on a alors un point double à tangentes imaginaires.

2° Le cône des tangentes sera réel, si deux au moins des trois quantités précédentes sont négatives. On

verrait facilement que la troisième est alors forcément positive. On a alors un point double à tangentes réelles.

Si le déterminant D est différent de o, le cône des tangentes est un cône propre du second degré. Si $D = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce cône se décompose en deux plans tangents à la surface en M, plans qui peuvent être confondus.

Donc cinq sortes de points coniques :

1° Un point double réel { un cône tangent réel, deux plans tangents réels;

2° Point double à tangentes imaginaires { un cône tangent imaginaire, deux plans tangents imaginaires, un plan tangent double.

Exemples :

I. $z^3 = x^2 + y^2 - z^2$. — La surface a un cône tangent réel à l'origine. Comme

$$f'_x = 2x, \qquad f'_y = 2y, \qquad f'_z = -3z^2 - 2z,$$

ces équations sont satisfaites pour

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \begin{cases} z = 0, \\ z = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Le point $(x = 0, y = 0, z = 0)$ est sur la surface, le point $\left(x = 0, y = 0, z = -\frac{2}{3}\right)$ n'y est pas : elle n'a qu'un seul point double à tangentes réelles.

II. $z^3 = x^2 + y^2 + z^2$. — Cette surface a un seul point double, l'origine, qui est un point double à tangentes imaginaires.

III. $z^3 = x^2 - y^2$:

$$f'_x = 2x, \qquad f'_y = -2y, \qquad f'_z = -3z^2.$$

Donc, la surface a pour point double l'origine, avec deux plans tangents réels; c'est son seul point double.

IV. $z^3 = x^2 + y^2$. — La surface a pour point double l'origine, avec deux plans tangents imaginaires; c'est son seul point double.

Remarque. — Soit une surface $f(x, y, z) = 0$. Ses points doubles satisfont à quatre équations, celle de la surface, et les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0.$$

En général, ces quatre équations sont incompatibles, et, en général, une surface n'a pas de point double.

Il peut arriver que les quatre équations aient un nombre fini de solutions communes, et qu'il y ait un certain nombre de points doubles; ou même une infinité de solutions communes, et que la surface ait une ligne de points doubles.

Je dis que, en tout point double appartenant à une ligne double, le cône des tangentes est décomposé en deux plans. En effet, si la surface a une ligne double, les trois surfaces $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ passent par cette ligne double. Cherchons la tangente à cette ligne double : elle est située dans les plans tangents à ces trois surfaces auxiliaires, plans qui ont pour équations

$$(X - x)f''_{x^2} + (Y - y)f''_{xz} + (Z - z)f''_{xz} = 0,$$
$$(X - x)f''_{xy} + (Y - y)f''_{y^2} + (Z - z)f''_{yz} = 0,$$
$$(X - x)f''_{xy} + (Y - y)f''_{yz} + (Z - z)f''_{z^2} = 0.$$

Ces plans doivent passer par une même droite; il faut que le déterminant de leurs coefficients soit nul ou que

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime précisément que le cône des tangentes est décomposé en deux plans. La droite commune à ces deux plans est la tangente à la ligne double.

En résumé, en un point double d'une surface, toute droite passant par ce point coupe la surface en deux points confondus. Il y a une infinité de tangentes coupant la surface en trois points confondus, ce sont celles dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(1) \qquad (uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

L'équation aux λ des points d'intersection d'une tangente en un point double avec la surface se réduit à

$$\frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = 0.$$

Considérons, en particulier, les tangentes dont les paramètres directeurs satisfont à l'équation

$$(2) \qquad (uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)}.$$

On a, pour déterminer une telle tangente, les deux équations (1) et (2), où les inconnues sont les trois quantités homogènes u, v, w; l'une est du deuxième, l'autre du troisième degré; et, par suite, il y a six tangentes, en général, satisfaisant à ces conditions.

Pour une quelconque de ces six tangentes, le premier coefficient non nul de l'équation en λ étant celui de λ^4 (en général), un quatrième point de l'intersection vient

se réunir aux trois premiers. Donc il existe, en général, en un point double d'une surface, *six tangentes osculatrices* ayant en commun avec la surface quatre points confondus avec le point double.

Si la surface est du troisième degré et possède un point double, ces six tangentes particulières, ayant quatre points communs avec la surface, sont situées tout entières sur la surface. Donc, *si une surface du troisième degré a un point double, elle contient six droites passant par le point double.*

Il pourrait arriver que l'équation (2) fût une conséquence de l'équation (1). Dans ce cas, pour toute tangente à la surface au point double, le coefficient de λ^3 s'annulerait et toute tangente serait osculatrice. On pourrait alors choisir les paramètres directeurs de la tangente de façon à annuler le coefficient de λ^4

$$\frac{1}{4!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(4)}.$$

On aurait alors deux équations en u, v, w du deuxième et du troisième degré qui détermineraient quatre tangentes *surosculatrices,* coupant la surface en quatre points confondus.

Nous n'insisterons pas sur cette singularité.

Intersection de la surface et d'un plan passant par un point double. — Soit

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

l'équation du plan passant par le point double $M(x, y, z)$. Une droite quelconque de ce plan a pour équation

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w} = \lambda,$$

avec la condition

$$au + bv + cw = 0,$$

et coupe la surface (et par suite sa section par le plan donné) aux points dont les λ sont racines de l'équation

$$f(x, y, z) + \frac{\lambda}{1}(uf'_x + vf'_y + wf'_z) + \frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \ldots = 0;$$

or,

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

puisque le point xyz est un point double de la surface. Cette équation a toujours deux racines nulles.

Donc, toute droite passant par le point double M et située dans le plan de la surface y coupe la section en deux points confondus : *toute section de la surface par un plan passant par* M *est un point double de la section.*

Si l'on choisit la droite telle que

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0,$$

c'est-à-dire si on la prend sur le cône des tangentes, elle coupe l'intersection en trois points confondus en M et, par suite, *les deux tangentes à la section en* M *sont les intersections du plan tangent et du cône des tangentes.*

Si le cône des tangentes est imaginaire, les tangentes à la section sont imaginaires et la section a nécessairement au point un point double isolé.

Si le cône des tangentes est réel, les tangentes à la section peuvent être réelles ou imaginaires, et la section peut présenter un point double réel ou isolé. Si le plan sécant est tangent au cône des tangentes, les deux tangentes à la section sont confondues et la section présente

un point de rebroussement. Le plan est dit alors *tangent* à la surface au point double M; et l'on voit que :

Tout plan tangent à une surface en un point double coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement.

Ces résultats restent vrais si le cône des tangentes est décomposé en deux plans. Les plans tangents à ce cône sont alors remplacés par les plans passant par la droite commune aux deux plans. Si les plans sont imaginaires, toute section plane passant par le point double y présente un point double isolé : *sauf les sections par des plans passant par la droite réelle commune aux deux plans, qui ont un point de rebroussement.* Un exemple de cette singularité est fourni par la surface engendrée par la révolution d'une parabole semi-cubique autour de sa tangente de rebroussement; c'est la surface déjà citée plus haut :

$$z^3 = x^2 + y^2.$$

Si les plans tangents sont réels, les sections par des plans quelconques passant par le point double y présentent un point double réel, sauf par ceux qui passent par la droite d'intersection des deux plans, lesquels présentent un rebroussement.

Si les deux plans tangents sont confondus, les sections par des plans passant par le point double y présentent toutes un point de rebroussement; un tel point sera dit *point de rebroussement de la surface.*

Reste à voir comment les deux plans tangents eux-mêmes coupent la surface. Les plans tangents forment le lieu des droites telles que

$$(u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)} = 0;$$

toute droite tracée dans l'un de ces plans annule le coefficient de λ^2 dans l'équation en λ

$$\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} + \frac{\lambda^3}{1.2.3}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} + \ldots = 0.$$

Cette équation a trois racines nulles et une droite quelconque, tracée dans un des plans tangents, et passant par le point double M, coupe la section par ce plan en trois points confondus au moins. *La section par un des deux plans tangents coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple au moins.*

Pour obtenir les tangentes, il faut écrire qu'un quatrième point d'intersection de la droite et de la section vient se confondre avec M; c'est-à-dire que l'équation a une quatrième racine nulle, ou que le coefficient de λ^3 est nul :

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0.$$

C'est l'équation qui détermine les tangentes osculatrices. Donc :

Les tangentes à la section par un des plans tangents en un point double à cône de tangentes décomposé sont trois des six tangentes osculatrices et il y a trois de ces tangentes dans chacun des deux plans.

Si l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0$$

était une conséquence de l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0,$$

la section par un de deux plans tangents présenterait un point quadruple. Plus généralement elle pourrait présenter un point multiple d'ordre quelconque.

Remarque. — On désignera les points doubles à cônes de tangentes sous le nom de *points coniques ;* ceux à deux plans tangents sous le nom de *points doubles;* ceux à un point tangent sous le nom de *point de rebroussement*.

Points multiples. — Il peut arriver, plus généralement, que, par un point $M(x, y, z)$ de la surface, toutes les dérivées successives d'ordre 1, 2, ..., $(p-1)$ s'annulent. L'équation aux λ des points d'intersection de la surface et d'une droite passant par M se réduit à

$$\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} + \frac{\lambda^{p+1}}{(p+1)!}(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} + \ldots = 0,$$

et a p racines nulles. Une droite quelconque passant par M y coupe la surface en p points confondus. Le point est dit *multiple d'ordre p*.

En nommant tangente en M une droite passant par M et y coupant la surface en $(p+1)$ points confondus, on trouve alors un cône d'ordre p lieu de tangentes, ces tangentes étant définies par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} = 0,$$

et $p(p+1)$ tangentes osculatrices définies par l'équation précédente et l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} = 0.$$

Le cône des tangentes pourra se décomposer, et comprendre un certain nombre de plans.

On verrait, comme précédemment, que :

1° La section par un plan quelconque passant par M présente en M un point multiple d'ordre p, les p tan-

gentes étant les génératrices d'intersection de son plan et du cône des tangentes.

2° La section par un plan tangent au cône des tangentes présente un point multiple d'ordre p, deux des p tangentes étant confondues, de sorte que deux des p branches de courbe se réunissent et leur ensemble prend l'aspect d'un point d'inflexion. Si le cône présente des génératrices doubles, il faut ajouter aux plans tangents ceux passant par ces génératrices.

3° Si le cône se décompose et comprend un plan, ce plan coupe la surface suivant une courbe ayant un point multiple d'ordre $p+1$, les tangentes étant $p+1$ des tangentes osculatrices, qui se trouvent alors dans ce plan.

[L²14aα]

NOTE SUR LE THÉORÈME DE PASCAL DANS L'ESPACE;

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

Nous avons publié autrefois (¹) une étude sur la relation géométrique entre dix points d'une quadrique ou neuf points d'une quartique, ou huit points *associés*, c'est-à-dire tels que toute quadrique passant par sept d'entre eux passe forcément par le huitième point. Pour cette dernière relation seule, entre huit points associés, nous avons trouvé une forme pascalienne :

Si un octogone gauche a ses huit sommets associés, ses faces opposées se coupent suivant quatre droites qui sont sur un même hyperboloïde.

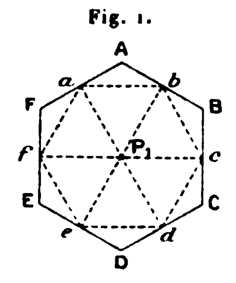
(¹) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 131.

Ayant eu récemment l'occasion de réfléchir de nouveau sur cette question de l'extension du théorème de Pascal à l'espace, nous avons rencontré quelques propositions qui, sans prétendre à la souveraine élégance de l'hexagramme mystique, peuvent intéresser les amateurs de Géométrie.

Les voici brièvement résumées :

1° *Généralisation d'un théorème de Hesse.* — Étant donné un hexagone gauche ABCDEF et un point P_1 (*fig.* 1), si l'on mène par ce point les trois droites *ad*,

Fig. 1.



be, *cf* qui s'appuient sur les côtés opposés de l'hexagone, on sait que les côtés de l'hexagone *abcdef* sont six génératrices d'un même hyperboloïde H_1 que nous appellerons *hyperboloïde de Hesse*.

Le théorème de Hesse consiste en ce que les deux hyperboloïdes H_1 et H_2 correspondant à deux points P_1 et P_2 *associés* aux six points A, B, C, D, E, F sont identiques.

Ce théorème est un succédané non pascalien de celui que nous venons de rappeler.

Il comporte deux généralisations :

a. Si H_1, H_2 et H_3 sont trois hyperboloïdes de Hesse correspondant à trois points P_1, P_2 et P_3 situés sur une

quartique circonscrite à l'hexagone ABCDEF, ces trois hyperboloïdes ont une infinité de plans tangents communs.

b. Si H_1, H_2, H_3 et H_4 sont quatre hyperboloïdes de Hesse correspondant à quatre points P_1, P_2, P_3, P_4, appartenant à une même quadrique que les sommets de l'hexagone ABCDEF, ces quatre hyperboloïdes ont huit plans tangents communs (dont les six faces de l'hexagone).

Ces généralisations comportent de nombreux corollaires plus ou moins intéressants, en particulier un mode de génération de la surface du second ordre passant par neuf points quelconques.

2° *Relation entre une génératrice et sept points quelconques d'une quadrique.* — Une telle relation présente un intérêt particulier parce qu'appliquée deux fois elle donne la relation double qui lie neuf points quelconques d'une quartique. Il suffit, en effet, de remarquer que, si neuf points sont sur une quartique, sept quelconques d'entre eux et la droite qui joint les deux autres sont sur une quadrique.

Nous avons rencontré deux formes simples de cette relation, sans pouvoir d'ailleurs en déduire une forme symétrique pascalienne.

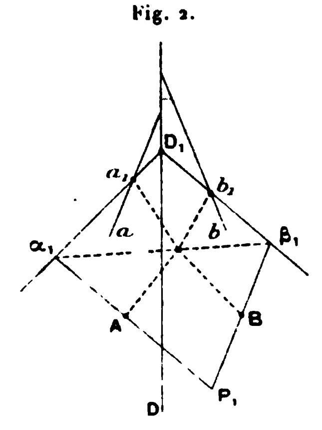
Théorème I. — *Si sept points* A, B, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *et une droite* D *sont sur une quadrique, il en résulte que cinq certaines droites, telles que* $\alpha_1\beta_1$, *fort aisées à construire, rencontrent une même droite.*

La droite $\alpha_1\beta_1$ joint les points α_1 et β_1 où les droites P_1A et P_1B rencontrent deux plans fixes passant par la génératrice D et d'ailleurs arbitraires.

La démonstration géométrique est fort simple :

Les deux plans arbitraires passant par D coupent la quadrique suivant deux génératrices a et b. Considérons le plan P_1AB et soient D_1, a_1 et b_1 les intersections de ce plan avec les trois génératrices D, a et b (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les six points P_1, A, B et D_1, a_1, b_1 sont sur une même conique, intersection de la quadrique avec le plan P_1AB; donc, d'après le théorème de Pascal, les droites Ab_1 et Ba_1 se coupent sur la droite $\alpha_1\beta_1$ ou, autrement dit, la droite $\alpha_1\beta_1$ rencontre l'intersection des deux plans Ab et Ba, c'est-à-dire une droite fixe quel que soit le point P_1 sur la quadrique.

Théorème II. — *La relation qui suit ne fait intervenir que des plans et des droites directement définis par les données; elle consiste en ce que quatre certains plans passent par un même point.*

Lemme. — *Si par quatre points d'une biquadratique gauche fixe, situés dans un même plan A et par trois points fixes quelconques on fait passer une quadrique, les quatre nouveaux points d'intersection de*

la quadrique et de la biquadratique sont dans un même plan X qui passe par un point fixe quelle que soit la quadrique.

Ce lemme, analogue au lemme classique qui sert habituellement à démontrer le théorème de Pascal en Géométrie analytique, s'établit de la même manière :

Soient F_1 et F_2 deux quadriques dont l'intersection donne la biquadratique considérée; l'équation générale des quadriques passant par l'intersection des plans A et X avec la courbe donnée est

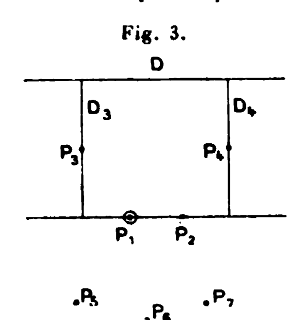
$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + AX = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres arbitraires.

En écrivant que cette quadrique passe par les trois points donnés et éliminant λ_1 et λ_2 entre les trois équations ainsi obtenues, on a une relation du premier degré entre les coefficients du plan X, ce qui prouve que ce plan passe par un point fixe.

Soient maintenant une droite D et sept points P_1, P_2, ..., P_7 d'une même quadrique. Joignons $P_1 P_2$ et

Fig. 3.



menons (*fig.* 3) par P_3 et par P_4 les deux droites D_3 et D_4 s'apppuyant sur D et sur $P_1 P_2$. D'après le lemme, toutes les quadriques passant par P_1 et D (ce qui équi-

vaut à quatre points) et par les trois points P_5, P_6, P_7 coupent les droites D_3, D_4 et P_1P_2 (qui avec la droite D constituent une quartique) en trois nouveaux points dont le plan passe par un point fixe évidemment situé dans le plan $P_5P_6P_7$.

En considérant, par exemple, la quartique constituée par les deux plans $P_1P_5P_6$ et P_7D, on obtient un plan X qui passe par les trois points suivants :

Premier point :

Intersection du plan P_7D et de la droite P_1P_2;

Deuxième point :

Intersection des trois plans $P_1P_5P_6$, $P_1P_2P_3$, P_3D;

Troisième point :

Intersection des trois plans $P_1P_5P_6$, $P_1P_2P_4$, P_4D.

On peut donc dire que, si une droite D et sept points P_1, P_2, ..., P_7 sont sur une même quadrique, quatre plans, faciles à déterminer d'après les données passent par un même point.

Ces quatre plans sont par exemple :

Premier plan :

$$P_5P_6P_7;$$

Deuxième plan :

$$(P_7D, P_1P_2),\quad (P_1P_5P_6, P_1P_2P_3, P_3D),\quad (P_1P_5P_6, P_1P_2P_4, P_4D);$$

Troisième plan :

$$(P_5D, P_1P_2),\quad (P_1P_6P_7, P_1P_2P_3, P_3D),\quad (P_1P_6P_7, P_1P_2P_4, P_4D);$$

Quatrième plan :

$$(P_6D, P_1P_2),\quad (P_1P_7P_5, P_1P_2P_3, P_3D),\quad (P_1P_7P_5, P_1P_2P_4, P_4D).$$

Il semble que la forme pascalienne, si elle existait pour les neuf points d'une quartique, résulterait assez simplement de ce qui précède; nous n'avons pas réussi à la mettre en évidence.

Relations métriques. — Nous avons essayé, sans succès, en suivant la voie ouverte par les théorèmes de Carnot et de Chasles, de trouver quelque relation métrique *simple* entre les éléments fournis par dix points quelconques d'une quadrique.

Nous croyons cependant devoir signaler le théorème suivant qui donne une relation métrique fort simple pour exprimer que deux triangles sont inscrits et par suite circonscrits à une même conique, relation qui, croyons-nous, n'a pas été remarquée dans les nombreux travaux publiés sur cette question.

THÉORÈME. — *Si par n points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *non en ligne droite, on peut faire passer les côtés* $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3, \ldots$ et $\alpha'_1\alpha'_2$, $\alpha'_2\alpha'_3, \ldots$ *de deux polygones plans ou gauches, inscrits dans une quadrique, les produits segmentaires*

$$\frac{A_1\alpha_1}{A_1\alpha_2}\,\frac{A_2\alpha_2}{A_2\alpha_3}\cdots$$

et

$$\frac{A_1\alpha'_1}{A_1\alpha'_2}\,\frac{A_2\alpha'_2}{A_2\alpha'_3}\cdots$$

sont inverses l'un de l'autre.

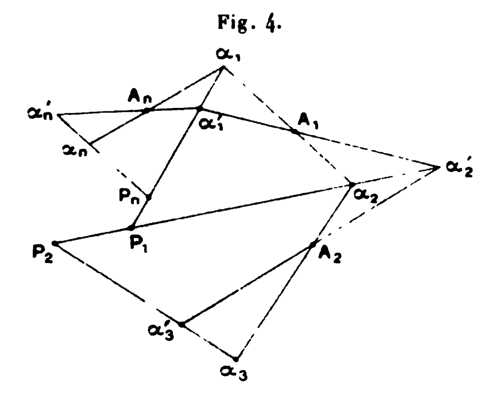
Joignons, en effet, les points homologues $\alpha_1\alpha''_1$, $\alpha_2\alpha'_2$, ... (*fig.* 4). Nous formons ainsi un polygone gauche dont les sommets sont aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n$. (Pour que ce polygone existe, ne se réduise pas à un point, il faut que les points $A_1, A_2, \ldots$ ne soient pas en ligne droite, d'où la restriction de l'énoncé.) Les

côtés successifs de ce polygone sont coupés aux points $\alpha_1\alpha'_1$, $\alpha_2\alpha'_2$, ... par la quadrique. La relation de Carnot donne donc

$$\frac{\alpha_1 P_n}{\alpha_1 P_1}\,\frac{\alpha'_1 P_n}{\alpha'_1 P_1}\,\frac{\alpha_2 P_1}{\alpha_2 P_2}\,\frac{\alpha'_2 P_1}{\alpha'_2 P_2} = \ldots = 1.$$

Or, en considérant le triangle $\alpha_1\alpha_2P_1$ coupé par la trans-

Fig. 4.



versale $\alpha'_1\alpha'_2$, puis le triangle $\alpha'_1\alpha'_2$, coupé par la transversale α_1, α_2, on a

$$\frac{A_1\alpha_1}{A_1\alpha_2}\,\frac{\alpha'_1 P_1}{\alpha'_1\alpha_1}\,\frac{\alpha'_2\alpha_2}{\alpha'_2 P_1} = 1$$

et

$$\frac{A_1\alpha'_1}{A_1\alpha'_2}\,\frac{\alpha_1 P_1}{\alpha_1\alpha'_1}\,\frac{\alpha_2\alpha'_2}{\alpha_2 P_1} = 1,$$

d'où l'on tire, en multipliant,

$$\frac{A_1\alpha_1}{A_1\alpha_2}\,\frac{A_1\alpha'_1}{A_1\alpha'_2} = \frac{P_1\alpha_2 . P_1\alpha'_2}{P_1\alpha_1 . P_1\alpha'_1}\left(\frac{\alpha_1\alpha'_1}{\alpha^2\alpha'_2}\right)^2;$$

on aurait de même

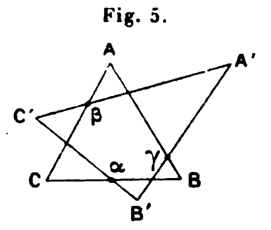
$$\frac{A_2\alpha_2}{A_2\alpha_3}\,\frac{A_2\alpha'_2}{A_2\alpha'_3} = \frac{P_2\alpha_3 . P_2\alpha'_3}{P_2\alpha_2 . P_2\alpha'_2}\left(\frac{\alpha_2\alpha'_2}{\alpha_3\alpha'_3}\right)^2.$$

Etc., etc.

En faisant le produit membre à membre de ces égalités et tenant compte de la relation de Carnot écrite plus haut, le second membre est égal à 1, ce qui démontre le théorème.

Corollaire I. — Si les côtés de deux triangles ABC et A'B'C' se coupent deux à deux aux points α, β, γ (*fig.* 5), non en ligne droite, la condition nécessaire

Fig. 5.



et suffisante pour que les deux triangles soient inscrits ou circonscrits à une conique est que dans chaque triangle les produits segmentaires $\frac{\alpha B}{\alpha C}\frac{\beta C}{\beta A}\frac{\gamma A}{\gamma B}$ soient inverses.

Corollaire II. — Toute quadrique circonscrite à un pentagone gauche coupe un plan quelconque suivant une conique astreinte à une condition. Le théorème précédent donne une forme de cette condition : En appelant α, β, γ, δ, ε les points d'intersection des côtés du pentagone ABCDE et du plan (*fig.* 6), on sait que l'on a

$$\frac{\alpha C}{\alpha D}\frac{\beta D}{\beta E}=\ldots=1.$$

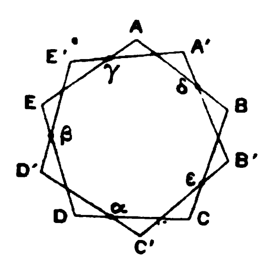
Si donc A'B'C'D'E' est un pentagone du plan, dont les côtés passent par les points α, β, γ, δ, ε, avec la condition

$$\frac{\alpha C'}{\alpha D'}\frac{\beta D'}{\beta E'}=\ldots=1,$$

la conique déterminée par les cinq points A′, B′, C′, D′, E′ est sur une quadrique passant par les cinq points A, B, C, D, E.

Corollaire III. — Si par cinq points d'un plan on fait passer les côtés de deux pentagones gauches quel-

Fig. 6.



conques, leurs dix sommets sont toujours sur une même quadrique, car les produits segmentaires, étant pour chaque pentagone égaux à 1, sont inverses.

Ce dernier théorème n'est pas nouveau; nous le citons à cause de la simplicité de la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

Introduction a la Géométrie générale; par M. *G. Lechalas*. — In-16 (58 pages). Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Cet opuscule est une apologie de la Géométrie générale contre les euclidiens et contre certains non-euclidiens. L'auteur rappelle d'abord certaines notions de Géométrie euclidienne à une, deux et trois dimensions, notamment la définition intrinsèque de la courbure, pour en préparer la généralisation;

puis il expose les éléments de la Géométrie à quatre dimensions, qui n'est pas une simple construction analytique, mais une généralisation nécessaire de la Géométrie classique, car celle-ci, confinée dans les trois dimensions, forme un système clos, et il importe d'en sortir pour mieux connaître les propriétés de l'espace euclidien. Si elle ne correspond à aucune intuition réelle, elle correspond du moins à une intuition possible. L'auteur étudie avec soin le fait de quatre droites perpendiculaires entre elles au même point, puis les sphères à trois dimensions et leur retournabilité dans un espace sphérique de même courbure. Il soutient alors (contre MM. Mansion et Barbarin, qui n'admettent pas de Géométrie à plus de trois dimensions) que les plans de Riemann sont, non seulement analogues, mais identiques aux sphères d'Euclide. Si celles-ci ne sont pas retournables, c'est qu'on les considère dans l'espace euclidien. Enfin l'auteur fait une étude analogue de l'espace de Lobatchevsky, et explique ce paradoxe, que deux points donnés peuvent être joints par une droite aussi courte que l'on veut, en choisissant convenablement l'espace à courbure négative où l'on mène cette droite. En somme, le différend entre M. Lechalas et les auteurs qu'il combat se réduit à cette question : doit-on considérer comme identiques des espaces isométriques, c'est-à-dire indiscernables par leurs propriétés intrinsèques? En tout cas, on ne peut les discerner qu'en les plongeant dans un même espace qui les contienne tous; et alors on peut dire que ce ne sont plus des *espaces*, mais des figures de cet espace supérieur. Il semble que la question se réduise en fin de compte à une question de mots.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR 1905. — In-16 de près de 800 pages avec figures. Prix : 1fr,50 (franco, 1fr,85). Paris, Gauthier-Villars.

La librairie Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1905. Ce petit Volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Signalons tout spécialement cette année la Notice de M. P. HATT, *Explication élémentaire des marées.*

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

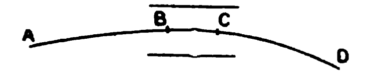
Épreuve écrite. — I. *Mode de fonctionnement des embrayages par cône de friction dans les voitures automobiles.*

II. *Effet de l'inertie de la bielle sur le couple moteur, dans le cas d'une machine à vapeur.*

Épreuve pratique. — *Une automobile pèse* 1000^{kg} *et a son centre de gravité dans le plan médian longitudinal à une hauteur de* 0^m,80. *La voie est égale à* 1^m,20, *l'empattement à* 2^m,60, *le diamètre des roues à* 0^m,95. *Les roues de chaînes ont trois fois plus de dents que les pignons de chaînes, et les engrenages coniques du différentiel deux fois plus que les pignons satellites.*

Le moteur fait 1200 *tours à la minute; son arbre, y compris les volants, les cônes d'embrayage et divers engrenages, pèse* 100^{kg} *et a un rayon de giration égal à* 0^m,20.

1° *La voiture quitte une ligne rectiligne* AB *pour en-*



trer, avec une vitesse de 30^{km} *à l'heure, sur un cercle* CD *de* 30^m *de rayon.*

La route étant très encombrée en B, *l'arc de raccord* BC *est seulement égal à trois fois l'empattement.*

On demande de déterminer l'accélération angulaire moyenne des pignons satellites pendant le virage.

2° *Déterminer la fraction de charge qui se reporte, pendant la marche, sur l'arc de cercle* CD, *de l'intérieur de la courbe à l'extérieur, à cause de la force centrifuge, en tenant compte de l'effet gyroscopique du volant.*

(Novembre 1904.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une barre infiniment mince, rectiligne, homogène et pesante, se meut sans frottement sur la surface latérale d'un cône de révolution. Ce cône est fixe, son axe est vertical, et son sommet est situé en dessous du plan de la base.*

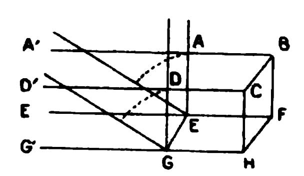
1° *Trouver les équations qui déterminent le mouvement de la barre;*

2° *Etudier le cas particulier où le mouvement de la barre, à l'époque initiale, se réduit à une rotation autour de l'axe du cône, et où l'on a la relation*

$$2g\cos\theta = \omega^2 r_0 \sin^2\theta,$$

θ *étant le demi-angle du cône,* r_0 *la distance initiale du sommet du cône au centre de gravité de la barre,* ω *la vitesse angulaire initiale de la barre,* g *l'accélération due à la pesanteur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un vase parallélépipédique* ABCDEFGH, *dont les arêtes* AB, DC *sont dans un même plan horizontal (de même* EF *et* GH), *est construit de telle sorte que la face* ADEG *soit mobile, comme pouvant tourner*



autour de l'arête fixe EG, *en glissant à frottement doux entre les parois latérales qui sont prolongées, comme l'indique la figure, l'angle* α *variant de* 90° *à* 0°.

On remplit complètement le vase de liquide, alors que la paroi mobile est verticale ($\alpha = 90°$), *puis on abaisse celle-ci lentement.*

Pour une valeur de α, *quelles sont :*

1° *La hauteur* h *du liquide dans le vase ;*

2° *La position du centre de pression du rectangle noyé de la paroi mobile.*

Enfin, connaissant ledit centre de pression, on exprimera sa position à l'aide de coordonnées et l'on déterminera son lieu lors de la variation continue de α.

(Novembre 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Principes de la flexion des poutres.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Travaux de laboratoire.*

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer le rôle des couples d'éléments cinématiques et leurs propriétés, lorsqu'on les considère, soit en eux-mêmes, soit dans leurs rapports avec les chaînes dont ils font partie. Exemples.*

II. *Qu'appelle-t-on tensions principales?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Épure de statique graphique.*

(Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Assemblage de deux corps. Moyens de le réaliser. Assemblages apparents. Exemples.*

II. *Propriétés de la déformation homogène. Déformation pure et rotation. (On ne développera les calculs que dans le cas de la déformation infiniment petite.)*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Travaux de laboratoire.*

(Octobre 1904.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer la méthode de Gauss pour la résolution de l'équation de Képler*

$$u - e \sin u = \mathrm{M}.$$

La comparer à l'application de la méthode de Newton.

II. *Un miroir plan est fixé invariablement à un axe contenu dans son plan et parallèle à l'axe du monde d'un certain lieu. Cet axe peut tourner sur lui-même, en entraînant le miroir, comme l'axe horaire d'un équatorial.*

1° *Quelle vitesse de rotation doit-on donner au miroir pour que les rayons émanés d'une étoile se réfléchissent toujours suivant la même direction, l'étoile étant entraînée par le mouvement diurne.*

2° *Montrer qu'on peut disposer de l'orientation du miroir sur les rayons incidents de façon que les rayons réfléchis soient horizontaux.*

3° *Montrer que, si les rayons réfléchis d'*UNE *étoile ont une direction fixe, il en sera de même pour les rayons réfléchis de* TOUTES *les autres étoiles. Dire l'aspect du Ciel vu dans un tel instrument.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a observé au méridien le passage du centre du Soleil et sa déclinaison le* 1er *avril et le* 1er *juin* 1900, *et l'on a trouvé :*

Différence des ascensions droites à ces deux jours	$3^h 53^m 59^s,53$
Déclinaison le 1er avril	$4^\circ 28' 31'',7$
Déclinaison le 1er juin	$22^\circ\ 1' 58'',3$

On demande de calculer l'obliquité de l'écliptique.

(Novembre 1904.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de la réfraction atmosphérique dans l'hypothèse des couches d'air sphériques et concentriques.*

On établira l'équation différentielle du problème dans le cas général et l'on montrera comment on peut l'intégrer complètement dans l'hypothèse de Bouguer

$$rl^m = \text{const.}$$

(*r rayon d'une des couches d'air, l indice de réfraction de cette couche*).

Si l'on se borne à demander à la théorie l'expression analytique de la correction

$$\rho = a \operatorname{tang} r + b \operatorname{tang}^3 r + c \operatorname{tang}^5 r,$$

comment peut-on déterminer pratiquement les coefficients $a, b, c, \ldots$?

Épreuve pratique. — *On donne l'ascension droite et la déclinaison d'un astre*

$$\text{AR} = 2^h 25^m 40^s,2,$$
$$\text{D} = 41^\circ 13' 26''.$$

Trouver sa longitude L *et sa latitude* β.
L'obliquité de l'écliptique est

$$\omega = 23^\circ 27' 9''.$$

N. B. — *On raisonnera explicitement sur une figure et au moyen des propriétés des triangles sphériques.*

(Novembre 1904.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — I. *Méthodes et instruments employés pour obtenir le diamètre apparent du Soleil.*

II. *Méthode de Gauss pour résoudre par approximation l'équation de Képler.*

Épreuve pratique. — *On a mesuré la hauteur et l'azimut par rapport à un signal d'une étoile connue, calculer l'heure sidérale et l'azimut du signal.*
Données :

Ascension droite........	$19^h 46^m 3^s$
Déclinaison.............	$+ 8^\circ 36' 43''$
Latitude du lieu.........	$+ 46^\circ 35' 5''$
Hauteur mesurée..	$40^\circ 55' 16''$
Azimut mesuré	$298^\circ 23' 32''$

L'observation précède le passage de l'étoile au méridien.

(Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Équation du temps.*

II. *Calcul de l'équation du temps pour chaque midi moyen et pour chaque midi vrai.*

III. *Discussion de l'équation du temps réduite à ses termes principaux.* (Novembre 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Mouvement parabolique des comètes : Éléments d'une orbite.*

Calcul des coordonnées héliocentriques rectangulaires à une époque donnée lorsque ces éléments sont connus.

Relation entre deux rayons vecteurs, la corde correspondante et la différence des temps de deux passages.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux étoiles* A *et* B, *de même ascension droite, ont pour coordonnées*

$$A\begin{cases}\alpha = 1^h 50^m 32^s,53,\\ \delta = 47^\circ 29' 41'',4,\end{cases}\qquad B\begin{cases}\alpha = 1^h 50^m 32^s,53,\\ \delta_1 = 58^\circ 19' 30'',2.\end{cases}$$

Une troisième étoile C *passe au méridien après les deux premières et forme avec celle-ci un triangle équilatéral. On demande de calculer son ascension droite* α' *et sa déclinaison* δ'. (Novembre 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Expliquer sommairement les phénomènes de précession et de nutation.*

Indiquer les changements que subissent les coordonnées écliptiques ou équatoriales des étoiles en vertu de ces phénomènes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu de latitude inconnue, situé par* $43^\circ 14'$ *de longitude ouest par rapport à Paris, on a observé la hauteur d'une étoile dont les coordonnées sont :*

Ascension droite......... $\alpha = 0^h 5^m 19^s$
Déclinaison .... $\delta = 2^\circ 51' 30''$

La hauteur observée est

$$h = 57^\circ 35' 11''.$$

Enfin, un chronomètre a fourni, pour le moment de l'observation, la valeur du temps sidéral à Paris :

$$\theta_0 = 4^h 18^m 45^s.$$

On demande de calculer la latitude du lieu, sachant en outre qu'il est situé dans l'hémisphère austral.

(Octobre 1904.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE CÉLESTE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Intégrer par la* MÉTHODE DE JACOBI *le problème d'un point matériel attiré par un centre fixe conformément à la loi de Newton.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux planètes, en mouvement sur un même plan, ont respectivement pour masses, pour grands axes, pour excentricités, pour longitudes du périhélie*

$$m,\quad a,\quad e,\quad \varpi,$$
$$m',\quad a',\quad e',\quad \varpi'.$$

La fonction F *peut s'écrire sous la forme*

$$F = A + B + C + Ne^2 + Pe'^2 + 2Qee'\cos(\varpi - \varpi'),$$

où A *est une constante dépendant seulement des masses et des grands axes,* B *un ensemble de termes périodiques,* C *un ensemble de termes du quatrième degré au moins par rapport aux excentricités; où enfin* N, P, Q *sont des coefficients dépendant seulement des masses et des grands axes.*

On demande quelles seront les variations séculaires des excentricités et des périhélies, en négligeant les puissances supérieures des excentricités, c'est-à-dire l'ensemble des termes désignés par C. (Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer le principe de la méthode de la variation des constantes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On envisage un système formé du Soleil, d'une grosse planète analogue à Jupiter et d'une petite planète. On supposera :*

1° *Que la masse de la petite planète est négligeable :*

2° *Que les trois corps se meuvent dans un même plan ;*

3° *Que l'orbite de la grosse planète est circulaire ;*

4° *Que l'on peut négliger l'excentricité de l'orbite de la petite planète.*

On désignera par a le grand axe de la grosse planète, par m sa masse, celle du Soleil étant 1, *par* ζ *son anomalie moyenne. Pour la petite planète, on désignera par* a' *son grand axe et par* ζ' *son anomalie moyenne.*

On suppose enfin que la petite planète est très rapprochée du Soleil, de telle façon que l'on puisse négliger les puissances supérieures du rapport $\frac{a'}{a}$. *(Cette condition n'est pas réalisée pour les astéroïdes du système solaire.)*

Dans ces conditions, on demande de calculer le coefficient de la principale inégalité de la longitude de la petite planète dont l'argument est $2(\zeta - \zeta')$.

D'après ce qui précède, on négligera le carré de m, *les puissances supérieures de* $\frac{a'}{a}$ *et les excentricités.*

(Octobre 1904.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la série*

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions holomorphes dans une aire limitée par un contour fermé (C); *cette série est uniformément convergente sur le contour* (C).

Démontrer :

1° *Qu'elle est convergente en tout point situé à l'inté-*

rieur d'un contour (C′) *complètement intérieur à* (C) *et n'ayant avec* (C) *aucun point commun;*

2° *Que la somme* $\varphi(z)$ *de cette série est holomorphe à l'intérieur de* (C′);

3° *Que la série dont le terme général est* $\frac{d^k f_n(z)}{dz^k}$ *est convergente à l'intérieur de* (C′) *et a pour somme la dérivée d'ordre* k *de la fonction* $\varphi(z)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *le point de coordonnées*

$$x = v\cos u - a\sin u, \qquad y = v\sin u + a\cos u, \qquad z = hu$$

décrit une surface (Σ) *lorsque* u *et* v *varient; par chaque point de* (Σ) *passent une droite et une hélice situées tout entières sur cette surface.*

1° *Trouver les trajectoires orthogonales de ces droites et de ces hélices;*

2° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface* (Σ); *montrer que les lignes asymptotiques de l'un des deux systèmes sont à l'intersection de* (Σ) *et d'hyperboloïdes de révolution autour de* Oz;

3° *Démontrer que les rayons de courbure principaux de* (Σ) *en un point quelconque satisfont à une relation simple;*

4° *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent orthogonalement les hyperboloïdes définis plus haut.* (Novembre 1904.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déterminer tous les systèmes de coordonnées qui donnent à l'élément linéaire du plan la forme*

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2},$$

où U *est une fonction de* u *et* V *une fonction de* v.

II. *Résoudre le même problème pour l'élément linéaire de la sphère.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de définir et d'étudier géométriquement toutes les représentations de la sphère sur le plan, dans lesquelles les aires sont conservées, les parallèles de la sphère devant correspondre à des cercles concentriques du plan.* (Octobre 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

589.

(1861, p. 141 et 1900, p. 189.)

Un polygône d'un nombre pair de côtés étant inscrit dans une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des mesures des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des mesures des parallélogrammes de rang impair. (FAURE.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient D et D' deux droites dont les équations respectives sont (axes rectangulaires ou non)

$$lx + my = 1,$$
$$l'x + m'y = 1.$$

Le parallélogramme obtenu en menant par l'origine des parallèles à ces droites a pour aire

$$\frac{1}{lm' - ml'},$$

à un facteur constant près.

Cela posé, prenons pour axes de coordonnées les asymp-

totes de la conique donnée. Son équation sera

$$xy = 1,$$

en choisissant convenablement l'unité de longueur.

Soient

$$\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), \quad \left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), \quad \ldots, \quad \left(x_{2m}, \frac{1}{x_{2m}}\right),$$

les coordonnées des $2m$ sommets du polygone considéré. Le côté joignant les sommets i et $i+1$ a pour équation

$$\frac{1}{x_i + x_{i+1}} x + \frac{x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} y = 1,$$

et l'inverse de l'aire du parallélogramme correspondant au sommet i a pour valeur, à un facteur constant près,

$$\frac{x_i x_{i+1} - x_{i-1} x_i}{(x_{i-1} + x_i)(x_i + x_{i+1})} = -\frac{x_{i-1}}{x_{i-1} + x_i} + \frac{x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}}.$$

La proposition à démontrer résulte donc de l'égalité

$$-\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_2 + x_3} - \frac{x_3}{x_3 + x_4} + \frac{x_5}{x_4 + x_5} - \ldots$$
$$= -\frac{x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_4}{x_3 + x_4} - \frac{x_4}{x_4 + x_5} + \frac{x_6}{x_5 + x_6} - \ldots,$$

qui se vérifie immédiatement par réunion des termes ayant même dénominateur.

1978.

(1903, p. 432.)

Nous dirons que les quatre pieds des normales abaissées sur une conique d'un point quelconque de son plan forment un QUADRANGLE D'APOLLONIUS.

Quatre points pris arbitrairement dans un plan ne forment pas en général un quadrangle d'Apollonius.

Démontrer que, si quatre points forment un quadrangle d'Apollonius, il en est de même des orthocentres des quatre triangles qui ont pour sommets les points donnés pris trois à trois. (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Un quadrangle d'Apollonius est déterminé par l'intersection d'une hyperbole équilatère H et d'une conique E qui a son centre sur H et ses axes parallèles aux asymptotes de H.

Réciproquement, l'intersection de deux coniques H et E satisfaisant à ces conditions détermine un quadrangle d'Apollonius.

Par suite, pour que quatre points (A, B, C, D) forment un tel quadrangle, il faut et il suffit que par ces quatre points on puisse faire passer deux coniques H et E, associées comme il vient d'être dit. Ce qui n'a pas lieu en général.

Cela étant, prenons pour axes de coordonnées les asymptotes de l'hyperbole équilatère passant par (A, B, C, D).

Soient

$$(1) \qquad xy - k^2 = 0$$

l'équation de cette hyperbole, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des quatre points, coordonnées satisfaisant à (1).

L'équation générale des coniques E associées à H est alors

$$(2) \qquad a(x-\alpha)^2 + b\left(y - \frac{k^2}{\alpha}\right)^2 - 1 = 0,$$

où a, b, α sont des paramètres variables.

(A, B, C, D) formeront un quadrangle d'Apollonius, si l'on peut déterminer ces paramètres de façon que (2) passe par les points donnés.

L'équation aux x des points d'intersection de (1) et de (2) est

$$(3) \qquad (a\alpha^2 x^2 + bk^4)(x-\alpha)^2 - \alpha^2 x^2 = 0.$$

Écrivant les relations entre les coefficients et les racines, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{\sum x_1 \sum x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sum x_1 \sum \frac{1}{x_1} = 4$$

ou

$$\sum \frac{x_1}{2} \sum \frac{y_1}{2} - k^2 = 0,$$

relation exprimant que le point, symétrique du centre de H par rapport au centre de gravité des quatre points, appartient à l'hyperbole H.

On sait (Ernest Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 66) que les orthocentres des triangles déterminés par les quatre points pris trois à trois sont sur (1).

Si l'on désigne par (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x'_4, y'_4) les coordonnées des orthocentres des triangles (BCD), (CDA), (DAB) et (ABC), on voit sans difficulté que

$$x'_1 = -\frac{k^4}{x_1 x_2 x_3 x_4} x_1,$$

$$y'_1 = -\frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{k^2} \frac{1}{x_1} = -\frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{k^4} y_1,$$

d'où

$$\sum \frac{x'_1}{2} \sum \frac{y'_1}{2} = \sum \frac{x_1}{2} \sum \frac{y_1}{2} = k^2,$$

qui exprime que les quatre orthocentres forment un quadrangle d'Apollonius. C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on désigne par O le centre de H, par I celui de E, les relations entre les racines et les coefficients de l'équation (3) montrent que le centre de gravité des points (A, B, C, D) est au milieu de OI.

1993.

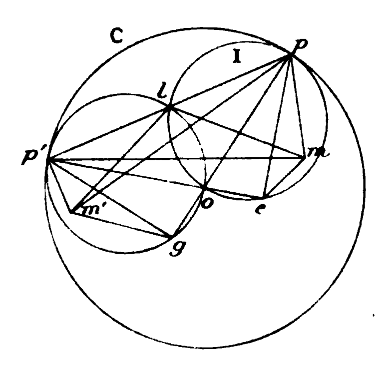
(1904, p. 144 et 478.)

Soient m et m' deux points d'une ellipse E. *Sur la normale en m, on porte, extérieurement à l'ellipse, une longueur mp, égale au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m. Soit p' le point analogue que l'on peut construire sur la normale en m'. Démontrer que, si la tangente en m' contient le point p, la tangente en m' contient le point p'.* (R. Bricard.)

AUTRE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. A. MANNHEIM.

Supposons que les points m et m' soient arbitraires. Du point o comme centre décrivons le cercle C qui passe par p et p'. Lorsque le cercle I de diamètre op roule à l'intérieur de C le point m décrit l'ellipse E, qui a pour normale en m la droite mp. Menons la droite $p'o$ qui coupe I au point e. Quand I roule, le point e décrit la droite eop'. Lorsque e est en p', le cercle I devient le cercle de diamètre op'. Menons la



droite pog qui est le diamètre décrit par p entraîné avec I. On a

$$pg = p'e.$$

La corde pe vient prendre la position gp' et le triangle pme vient en $gm'p'$. On peut amener le triangle pme en coïncidence avec $gm'p'$ au moyen d'une simple rotation. Le centre de rotation est à la rencontre de la perpendiculaire à pg élevée au milieu de ce segment et de la perpendiculaire à $p'e$ élevée au milieu de ce segment, il est alors au milieu l de pp'. On voit ainsi que les segments lm, lm' sont égaux et l'on peut dire :

Soient m et m' deux points arbitraires d'une ellipse. Les points p et p' étant déterminés, comme il a été dit précédemment, les points m et m' sont à égales distances du milieu du segment pp'.

Si l'angle pmp' est droit, on a

$$lp = lm,$$

et par suite du dernier théorème on a aussi

$$lp = lm',$$

d'où il résulte que l'angle $pm'p'$ est droit aussi. En d'autres termes, si $p'm$ est tangente à E, la droite pm' est aussi tangente à cette courbe.

Remarques. — Le dernier théorème peut être énoncé ainsi :

On prend les arcs interceptés sur les cercles de Chasles par les normales en m et m' extérieures (ou intérieures) à l'ellipse, les milieux des cordes sous-tendues par ces arcs sont sur la perpendiculaire élevée à mm' du milieu de cette corde.

On peut ajouter que *les cordes sous-tendues,* dont il vient d'être parlé, *sont tangentes à la parabole* [1], *tangente à mm', aux normales à* E *en ces points, aux axes de* E, *et à d'autres droites.*

1998.

(1904, p. 240.)

Calculer le déterminant

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 1 & C_m^2 & C_m^3 & C_m^4 & \dots & C_m^m \\ 1 & C_{m+1}^2 & C_{m+1}^3 & C_{m+1}^4 & \dots & C_{m+1}^m \end{vmatrix}.$$

(C. Bourlet.)

---

[1] Sur cette parabole, voir *The Messenger of Mathematics*, juillet 1890.

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Retranchant successivement les éléments de chaque ligne des éléments correspondants de la suivante, et tenant compte des relations

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1},$$
$$C_{k+1}^{k+1} = C_k^k,$$

on obtient

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ . & .. & .. & .. & \dots & . \\ 0 & C_m^1 & C_m^2 & C_m^3 & \dots & C_m^{m-1} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & \dots & . \\ C_m^1 & C_m^2 & C_m^3 & C_m^4 & \dots & C_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Retranchant encore chaque ligne de la suivante, et développant le déterminant obtenu par rapport aux éléments de la première ligne, on trouve

$$D_m = 2 \begin{vmatrix} C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & . & \dots & . \\ C_{m-1}^1 & C_{m-1}^2 & C_{m-1}^3 & C_{m-1}^4 & \dots & C_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix} - D_{m-2}$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$D_m = 2 D_{m-1} - D_{m-2},$$

d'où

$$D_{m-1} = 2 D_{m-2} - D_{m-3}$$

et, par suite,

$$D_m = 3 D_{m-2} - 2 D_{m-3},$$

et, d'une façon générale, par un raisonnement bien connu,

$$D_m = (p+1) D_{m-p} - p D_{m-(p+1)}.$$

On en tire

$$D_m = (m - 2)D_3 - (m-3)D_2;$$

or

$$D_2 = 2, \qquad D_3 = 3,$$

d'où l'on conclut

$$D_m = m.$$

2000.

(1904, p. 336.)

On considère une ellipse E. *Les cercles ayant pour diamètres les cordes parallèles au grand axe enveloppant une ellipse* E_1; *les cercles ayant pour diamètres les cordes parallèles au petit axe de* E *enveloppant une ellipse* E_2. *Pour toutes les ellipses* E *homofocales, le lieu des points de rencontre de* E_1 *et* E_2 *se compose de deux cubiques.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. L. Troin.

Rapportons l'ellipse à ses axes, et soit

$$y = b \sin\varphi$$

l'équation d'une parallèle au grand axe. Le cercle qui admet cette corde pour diamètre a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2b\sin\varphi y + b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi = 0$$

et son enveloppe E_1 a pour équation

(1) $$(a^2+b^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2+b^2).$$

On obtiendra de même pour l'équation de E_2

(2) $$b^2x^2 + (a^2+b^2)y^2 = b^2(a^2+b^2).$$

On tire des équations (1) et (2)

(3) $$x\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2} = \pm a^2\sqrt{a^2+b^2},$$

(4) $$y\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2} = \pm b^2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Prenons d'abord le même signe dans les deux seconds membres des équations (3) et (4). Nous en déduirons

$$(5) \qquad (x-y)\sqrt{a^4-b^4+a^2b^2} = \pm c^2\sqrt{a^2+b^2}$$

et, d'autre part, en divisant

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2},$$

d'où

$$a^2 = \frac{c^2 x}{x-y}, \qquad b^2 = \frac{c^2 y}{x-y}.$$

Remplaçant dans l'équation (6) a^2 et b^2 par leurs valeurs, on obtient

$$c^2\sqrt{x^2+y^2+xy} = \pm c^2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

Élevant au carré, on a pour équation du lieu

$$(x-y)(x^2+y^2+xy) - c^2(x+y) = 0.$$

Si l'on avait choisi des signes différents devant les seconds membres des équations (3) et (4) on aurait obtenu la seconde partie du lieu. C'est la cubique

$$(x+y)(x^2+y^2-xy) - c^2(x-y) = 0.$$

La première de ces cubiques passe par les foyers réels et imaginaires de l'ellipse, son asymptote réelle est la bissectrice

$$x-y=0,$$

l'origine qui est point d'inflexion admet la tangente

$$x+y=0.$$

La seconde cubique est symétrique de la première par rapport aux axes. Tous ces résultats sont évidents sur les équations.

Autres solutions de MM. Tabakoff, Alvarez Ude et Letierce.

2002.

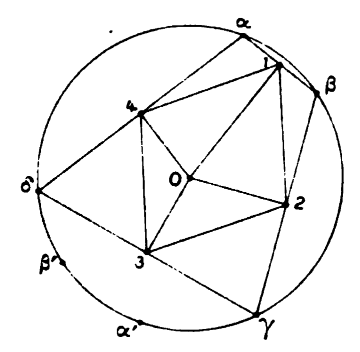
(1904, p. 528.)

On considère dans un plan un quadrilatère ABCD *circonscrit à un cercle de centre* O. *On mène, par les points* A, B, C, D *des perpendiculaires aux droites* OA, OB, OC, OD. *Le point* O *est sur la directrice de la parabole qui touche les quatre droites ainsi obtenues.* (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Si α, β, γ, δ sont respectivement les points de contact des côtés DA, AB, BC, CD et 1, 2, 3, 4 les milieux des segments



$\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, la parabole de l'énoncé est la polaire réciproque, par rapport au cercle de la conique (1, 2, 3, 4, O). Cette dernière conique est une hyperbole équilatère et les deux tangentes menées par O à la parabole, étant les perpendiculaires aux asymptotes, sont orthogonales; donc, le point O est sur la directrice.

Pour démontrer que (1, 2, 3, 4, O) est hyperbole équilatère il suffit d'observer que, en appelant α', β' les points diamétralement opposés à α, β, les angles $\beta\delta\alpha'$, $\alpha\gamma\beta'$ sont égaux, donc

$$\widehat{14O} = \widehat{12O}$$

et les deux faisceaux 4(1, O, 3), 2(1, O, 3) sont inversement égaux.

QUESTIONS.

2007. On donne, dans un plan, deux cercles C et C'; on mène à C une tangente variable qui coupe en m et n le cercle C'; soit ω le centre du cercle qui passe par les points m et n et par le centre O du cercle C. Quel est le lieu du point ω? (R. B.)

2008. On considère un triangle fixe ABC, une direction (Δ) et un point O. On tire AO, BO, CO. On mène par A la droite (α) symétrique de AO par rapport à la direction (Δ). On mène par B et C les droites (β) et (γ) analogues à (α).

1° (Δ) étant donnée, le lieu du point O tel que les droites (α), (β), (γ) correspondantes concourent en O' est l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle et dont (Δ) est une direction asymptotique.

2° O étant l'orthocentre du triangle, O' est sur le cercle circonscrit.

3° (Δ) étant donnée, trouver l'enveloppe de OO'.

(L. Troin.)

2009. On donne un quadrilatère ABCD inscrit dans une conique, et un point arbitraire O. Sur la tangente en A à la conique, on prend le point E où cette droite est rencontrée par le côté CB; on mène la droite OE qui coupe AB en M. Au moyen du côté CD, on obtient de même le point N sur AD. Quelle est l'enveloppe de la droite MN, lorsque C décrit la conique? (*Canon.*)

2010. Si les trilatères abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ ont un centre O d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du Tableau

$$(\text{centre O})\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix}\right\}$$

avec leurs *associées mineures* sont en ligne droite [l'associée de a est la droite (b_1c_2, b_2c_1)]. (P. Sondat.)

TABLE DES MATIÈRES.

Février 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari et Duporcq.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.
(64e volume de la collection.)

MARS 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. Bourlet, 22, avenue de l'Observatoire, 14e
ou à M. Bricard, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

[L¹5e]

SUR LA DÉVELOPPÉE ET LES QUASI-DÉVELOPPÉES D'UNE CONIQUE;

PAR M. ARTHUR MALUSKI.

1. Voici un moyen rapide d'exprimer qu'une droite est normale à une conique.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ \qquad + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0 \end{cases}$$

l'équation homogène d'une conique (S) rapportée à des axes rectangulaires. Si l'on désigne par Δ et par $F(u, v, w)$ le discriminant et la forme adjointe de la forme quadratique $f(x, y, z)$, on sait que le système des tangentes à la conique (S) aux points où elle est coupée par la droite (D) ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

est représenté par l'équation

$$(2)\quad \Delta(ux + vy + wz)^2 - f(x, y, z)\, F(u, v, w) = 0.$$

Ceci posé, pour que la droite (D) soit normale à la conique (S), il faut et il suffit que l'une des droites représentées par l'équation (2) soit perpendiculaire à la droite (D), et que, par conséquent, l'équation (2) soit vérifiée par les coordonnées du point rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite (D), c'est-à-dire par u, v et 0. On a ainsi la condition cherchée

$$(3)\quad \Delta(u^2 + v^2)^2 - \varphi(u, v)\, F(u, v, w) = 0$$

où l'on a posé

$$\varphi(u, v) = Au^2 + 2Huv + Bv^2.$$

Cette forme d'équation montre immédiatement que les foyers de la conique (S) sont aussi foyers de sa développée.

2. La même méthode s'applique à la recherche des quasi-développées. Appelons *quasi-développée* de la conique (S) relativement à une conique (S′) l'enveloppe de la conjuguée harmonique (D) de la tangente en un point A de la conique (S) par rapport aux tangentes à la conique (S′) issues du point A lorsque ce point décrit la conique (S).

La droite (D) et la tangente en A à la conique (S) étant conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes à (S′) issues de A sont conjuguées par rapport à (S′); cette condition nécessaire est du reste suffisante.

Prenons un triangle quelconque comme triangle de référence et supposons que la conique (S) rapportée à ce triangle ait une équation ponctuelle de la forme (1), la droite (D) étant toujours représentée par l'équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation (2) représente encore le système des tangentes à la conique (S) aux points A et B où elle est coupée par la droite (D).

Soit

$$(4) \qquad H(U, V, W) = 0$$

l'équation tangentielle de la conique (S′).

Pour que la droite (D) soit conjuguée à la tangente en A par rapport à la conique (S′), il faut et il suffit

que le pôle de (D) par rapport à (S′) soit sur cette tangente, et, par conséquent, que l'équation (2) soit vérifiée quand on y remplace x, y, z par les coordonnées de ce point, soit H'_u, H'_v, H'_w, ce qui donne la condition cherchée

$$(5)\qquad 4\Delta[H(u,v,w)]^2 - f(H'_u, H'_v, H'_w)\,F(u,v,w) = 0.$$

Si l'on suppose que l'équation (4) représente le système des deux points cycliques, il n'y a rien de changé à la démonstration précédente et l'équation (5) est alors l'équation tangentielle de la développée de (S), en coordonnées trilinéaires, et l'on voit que cette équation est beaucoup plus simple qu'on aurait pu le supposer, surtout si l'on se reporte à la complication des calculs auxquels il faut se livrer pour avoir l'équation de la même courbe en coordonnées ponctuelles (*voir*, par exemple, Salmon, *Courbes planes*, nos 106 et 109 de la traduction).

Cette courbe se décompose en un point et une courbe de troisième classe lorsque les deux coniques (S) et (S′) sont tangentes, le point étant le point de contact.

3. Supposons les deux coniques (S) et (S′) rapportées à leur triangle conjugué commun, de façon qu'on ait

$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$
$$H(u,v,w) = a'u^2 + b'v^2 + c'w^2.$$

L'équation (5) devient alors

$$(a'u^2 + b'v^2 + c'w^2)^2 - \left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c}\right)(aa'^2u^2 + bb'^2v^2 + cc'^2w^2) = 0$$

ou

$$(6)\qquad Av^2w^2 + Bw^2u^2 + Cu^2v^2 = 0$$

en posant

$$A = a(bb' - cc')^2,$$
$$B = b(cc' - aa')^2,$$
$$C = c(aa' - bb')^2.$$

La courbe qu'elle représente a pour équation ponctuelle

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^3 - 27\,ABC\,x^2y^2z^2 = 0.$$

Elle a, par conséquent, les mêmes singularités qu'une développée de conique : elle possède six points de rebroussement, situés deux à deux sur les côtés du triangle de référence; chaque côté est tangent à la courbe en chacun des deux points qu'il contient et les points de contact sont conjugués harmoniques par rapport à deux sommets du triangle de référence.

Elle a en outre, comme on le sait, quatre autres points doubles. Tout cela est du reste évident si l'on remarque qu'elle peut être considérée comme transformée homographique d'une développée de conique. En effet, soit (Δ) la tangente en (A) à la conique (S) et (D) celle de ses conjuguées par rapport à (S') qui passe par A. Les droites (D) et (Δ) sont également conjuguées par rapport à (S), par conséquent elles sont conjuguées par rapport à toute conique du faisceau tangentiel qui a pour bases (S) et (S'). Cela veut dire que la *quasi-développée de* (S) *relativement à* (S') *ne change pas quand on remplace* (S') *par une conique quelconque du faisceau tangentiel ayant pour bases* (S) *et* (S'). En particulier, cette propriété reste vraie lorsqu'on remplace (S') par un couple d'ombilics communs à (S) et (S') et il n'y a plus alors qu'à faire une transformation homographique faisant correspondre les points cycliques à ces ombilics pour établir notre assertion.

Si l'on prend la polaire réciproque de la courbe (6)

par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, on obtient la courbe

$$(7) \qquad Ay^2z^2 + Bz^2x^2 + Cx^2y^2 = 0.$$

C'est une quartique unicursale, étudiée par Laguerre [1] et qu'il a appelée quartique à trois points doubles d'inflexion, parce que la tangente en un point double la coupe en quatre points confondus avec lui.

On sait que si l'on pose

$$P = xx_0(Bz^2 + Cy^2) + yy_0(Cz^2 + Ax^2) + zz_0(Ay^2 + Bx^2),$$
$$Q = Ay_0z_0yz + Bz_0x_0zx + Cx_0y_0xy,$$
$$R = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0},$$

on a l'identité remarquable due à Laguerre

$$QR \equiv P + \frac{Q_0 xyz}{x_0y_0z_0},$$

et au moyen de laquelle l'illustre géomètre a démontré simplement que, si l'on prend un point $M(x_0, y_0, z_0)$ sur la courbe (7), les points de contact autres que M des tangentes à cette courbe issues du point M sont sur la droite $R = 0$, polaire trilinéaire du point M par rapport au triangle de référence.

On en conclut immédiatement, soit en refaisant la transformation inverse, soit en calquant les calculs précédents, que, si l'on considère une droite u_0, v_0, w_0 tangente à la courbe (6), les tangentes aux quatre points, autres que le point de contact, où elle rencontre la courbe passent par le point

$$\frac{u}{u_0} + \frac{v}{v_0} + \frac{w}{w_0} = 0,$$

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 337.

pôle trilinéaire de la droite u_0, v_0, w_0 par rapport au triangle de référence.

C'est, du reste, une propriété bien connue des développées.

4. Le rapprochement précédent entre les quasi-développées et les courbes de Laguerre donne une construction géométrique intéressante de la tangente en un point à toute une classe de ces courbes. En effet, considérons une conique (C) rapportée à des axes rectangulaires, d'ailleurs quelconques, et transformons par polaires réciproques la propriété de sa développée, en prenant pour conique directrice le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

On a le théorème suivant :

Si l'on joint un point variable A *d'une conique* (S) *à un point fixe* O *du plan et qu'on appelle* M *le point d'intersection de la tangente en* A *avec la perpendiculaire menée par* O *à la droite* OA, *le lieu du point* M *est une quartique de Laguerre, ayant comme points doubles les sommets du triangle rectangle en* O *conjugué à la conique* (S).

Pour construire la tangente en M à cette courbe, remarquons que le point de contact de la normale à une conique (C) avec son enveloppe est le centre du cercle osculateur à cette conique, au pied de la normale. Transformons cette construction par polaires réciproques.

Au cercle osculateur correspond une conique S′ osculatrice en A à la conique (S) et ayant son foyer en O, ce qui la détermine. La tangente en M à la quartique de Laguerre est la transformée du centre du cercle oscu-

lateur précédent : c'est donc la polaire du centre de ce cercle par rapport à la conique fondamentale, c'est-à-dire, d'après une propriété connue, la directrice de la conique (S') correspondant au foyer O.

Reste à construire cette droite. Pour cela, remarquons que les coniques (S) et (S') ont même cercle osculateur en A. Soit I son centre. Cherchons le second foyer O' de (S'); pour cela, remarquons que, si l'on désigne par N le point d'intersection de la normale en A à (S) avec OO', on sait que, IK étant la perpendiculaire abaissée du point I sur OA, la droite NK est perpendiculaire à AN. Cette remarque détermine le point N; ayant le point N, on connaît l'axe focal ON; la directrice cherchée est alors la perpendiculaire abaissée du point M sur ON.

Une transformation homographique convenable permettrait d'étendre la construction précédente.

[I9c]

NOTE D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. PAUL NIEWENGLOWSKI.

Posons

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1},$$

et soit d le plus petit multiple commun des nombres $1, 2, \ldots, n-1$. Je dis que :

1° *Si n n'est pas premier, le produit sd n'est pas divisible par n*;

2° *Si n est premier et supérieur à 3, le produit sd est divisible par n^2.*

1° Soient $a, b, \ldots, l$ les nombres premiers inférieurs à n, et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les plus grands exposants tels qu'on ait $a^\alpha < n$, $b^\beta < n$, $\ldots$, $l^\lambda < n$; on a

$$d = a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$$

et, par suite, le produit

$$sd = a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$$

peut s'écrire, si l'on isole le terme $\frac{1}{a^\alpha}$,

$$sd = b^\beta \ldots l^\lambda + \text{mult. } a.$$

Ce produit n'est donc pas divisible par a, et il en est de même pour chacun des nombres premiers inférieurs à n. Donc si n est un nombre composé, sd n'est pas divisible par n.

2° On sait que, si n est premier, toute fonction symétrique entière, à coefficients entiers, des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1$ est multiple de n, si son degré n'est pas divisible par $n-1$. Donc, en posant

$$P = 1.2.3\ldots(n-1),$$

si $n > 3$, on a

$$P^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \text{mult. } n.$$

Mais

$$P^2\left(\frac{1}{1(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)1}\right) = P^2\frac{2s}{n};$$

d'où en ajoutant

$$P^2\left(\frac{n}{n-1} + \frac{n}{2^2(n-2)} + \ldots + \frac{n}{(n-1)^2}\right) = \text{mult. } n + P^2\frac{2s}{n}$$

ou encore

$$d.P\frac{2s}{n} = \text{mult.}\, n$$

ou

$$2\,ds = \text{mult.}\, n^2 \qquad \text{ou} \qquad ds = M n^2.$$

C. Q. F. D.

[M^{1}5h]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME SUR LA CONSTANCE DU RAPPORT ANHARMONIQUE DES QUATRE TANGENTES, MENÉES A UNE CUBIQUE PAR UN DE SES POINTS;

PAR M. OSÉE MARCUS.

Considérons une cubique Γ et deux points A et B, pris sur cette courbe. La droite AB rencontre Γ en un troisième point C. Par ce point on peut mener quatre tangentes à Γ : soit O le point de contact de l'une d'elles. Une droite quelconque passant par A coupe la courbe en deux autres points A′ et A″. Menons la sécante OA′; soit B′ le troisième point d'intersection de cette droite avec Γ. Menons enfin la droite BB′ et soit B″ le troisième point d'intersection de cette droite avec la cubique. Je dis que les droites AA′ et BB′ se correspondent par homographie.

Il suffit évidemment de démontrer que, à une droite AA′, issue de A, il correspond une seule droite BB′ issue de B, et réciproquement. Or, d'un côté, les points que nous avons marqués se divisent en les trois groupes suivants de points en ligne droite (A, A′, A″), (B, B′, B″) et (C, O, O), où O est compté deux fois; d'autre part, les deux groupes de trois points A, B, C et O, A′, B′ sont respectivement en ligne droite. Il résulte donc d'une propriété connue des groupes de trois points, en

ligne droite sur une cubique, que les trois points O, A″, B″ sont en ligne droite. Donc : que l'on considère la droite A A′A″ comme étant déterminée par le point A′ ou qu'on la considère comme étant déterminée par le point A″, notre construction lui fait correspondre la même sécante BB′B″. On voit de même que, réciproquement, à la droite BB′B″ notre construction fait correspondre la droite AA′A″; ce qui démontre la proposition.

Conséquence. — On voit facilement que, à une tangente à Γ issue de A, il correspond une tangente issue de B. Cette correspondance étant homographique, le rapport anharmonique est conservé. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une cubique, issues d'un point de cette courbe, est constant quel que soit le point que l'on considère sur la courbe.

Les considérations précédentes permettent de distinguer les tangentes qui se correspondent.

[O2kα]

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FILE DE CERCLES;

PAR M. G. LERY.

Les trajectoires orthogonales d'une suite de cercles sont déterminées par l'intégration d'une équation de Riccati; de cette propriété, établie par MM. Em. Picard et Demartres, on déduit la suivante : le rapport

anharmonique des points où un même cercle de la file est rencontré par quatre des trajectoires ne varie pas quel que soit le cercle considéré. Je me propose de démontrer géométriquement ce dernier théorème.

1. Soit d'abord une *file contenue dans un plan*, Soient deux cercles consécutifs C et C′, soient M et M′ les points infiniment voisins où une trajectoire orthogonale Γ les rencontre respectivement. Les tangentes Mm, $M'm$ aux deux cercles sont deux normales infiniment voisines de Γ; donc $mM = mM'$, aux infiniment petits du second ordre près; par suite m est sur l'axe radical δ de C et C′. Les tangentes en M et M′ se coupant sur δ, ces deux points sont des points correspondants dans l'homologie d'axe δ, qui transforme C en C′. Comme l'homologie conserve le rapport anharmonique de quatre points d'une conique, le théorème est établi.

La démonstration précédente n'est pas rigoureuse, mais il est facile de la préciser. En effet, la différence des longueurs mM, mM' des deux normales de Γ est un infiniment petit du second ordre; la distance de m à l'axe radical δ, qui est, à un facteur fini près,

$$mM^2 - mM'^2 \quad \text{ou} \quad (mM - mM')(mM + mM'),$$

est donc du second ordre. Soit μ le point où mM coupe δ; il y a une tangente $\mu M'_1$ au cercle C′ infiniment voisine de mM', et M'_1M' est du second ordre comme μm. Mais il y a homologie entre M et M'_1, puisque les tangentes en ces points se coupent sur δ; donc, en prenant quatre points M, N, P, Q sur C

$$(MNPQ) = (M'_1 N'_1 P'_1 Q'_1).$$

En passant des points M'_1 aux points M′, la variation du rapport anharmonique, qui est fonction linéaire des

variations des paramètres qui définissent les points M'_1, est par suite du second ordre.

En conséquence, la différence

$$(M'N'P'Q') - (MNPQ) = (M'_1 N'_1 P'_1 Q'_1) - (MNPQ)$$

est du second ordre, ce qui s'écrit

$$d(MNPQ) = 0,$$
$$(MNPQ) = \text{const.}$$

2. Dans le mouvement d'une figure plane rigide, il existe à chaque instant une rotation instantanée; ici nous pouvons dire qu'il y a une *homologie instantanée* qui transforme le cercle C de la file dans le cercle infiniment voisin C′; un point M et son transformé M′ sont sur une trajectoire orthogonale de la file.

L'axe d'homologie est la corde de contact de C avec son enveloppe; le pôle, par lequel passent à la limite les droites MM′, est le centre de C.

Les centres de courbure des trajectoires orthogonales, relativement aux points de ces trajectoires situés sur un même cercle C, sont sur l'axe d'homologie correspondant. En particulier, les points où cet axe coupe C, s'ils sont réels, sont points de rebroussement, et les extrémités du diamètre perpendiculaire sont points d'inflexion des trajectoires correspondantes.

3. Dans l'espace, tout ceci s'étend sans peine à une *file de sphères*. L'homologie instantanée qui transforme une sphère en la suivante a pour centre le centre de la sphère, pour plan double le plan radical limite; chaque point est déplacé suivant la direction de la trajectoire orthogonale. Enfin les axes de courbure de ces trajectoires, relatifs aux points de rencontre avec une même sphère, sont situés dans le plan d'homologie.

4. Soit maintenant une *suite de cercles dans l'espace*. J'appelle C et C' deux cercles infiniment voisins, γ l'intersection de leurs plans. Pour passer de C à C', j'effectue d'abord une rotation infiniment petite autour de γ; cette rotation transforme C en un cercle C'', qui est dans le plan de C'; ensuite je fais une homologie infiniment petite qui change C'' en C'. Un point M de C devient M'', puis M'; les deux segments MM'', $M''M'$ sont à la limite perpendiculaires à la tangente à C'' en M''; leur résultante MM' est donc à la limite perpendiculaire à la tangente en M au cercle C : c'est la direction d'une trajectoire orthogonale.

La rotation et l'homologie effectuées ne changeant pas le rapport anharmonique de quatre points de C, le théorème est démontré.

5. J'appelle T la transformation, produit d'une rotation et d'une homologie, qui fait passer d'un cercle C au cercle suivant dans la file.

Lorsque deux cercles consécutifs de la file sont sur une même sphère, les tangentes aux trajectoires orthogonales en tous les points d'un cercle C forment évidemment un cône circonscrit à la sphère qui contient C et C'; la transformation T est alors une homologie dans l'espace. La surface lieu des cercles de la file les admet comme lignes de courbure d'un système; le second système est formé par les trajectoires orthogonales. Le théorème démontré s'énonce alors ainsi :

Si une surface admet des cercles comme lignes de courbure d'un système, quatre lignes de courbure du second système coupent chacun des cercles en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

[H6b]

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Notation de M. Méray. — Indiquons d'abord la notation que nous allons employer et dont l'idée est due à M. Méray.

Étant données n fonctions $x_1, \ldots, x_r$ de r paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_r$, nous poserons

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)} d\omega_1 \, d\omega_2 \ldots d\omega_r$$

en désignant par $d\omega_i$ la différentielle de ω_i et par

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$$

le déterminant fonctionnel de $x_1, \ldots, x_r$ par rapport à $\omega_1, \ldots, \omega_r$.

On voit alors que la *différentielle multiple*

$$d(x_1, \ldots, x_r)$$

a, avec le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$, le même lien que la différentielle dy avec la dérivée y'_x.

On démontre facilement que, si $y_1, \ldots, y_r$ sont r fonctions de n quantités, $x_1, \ldots, x_n$ dépendant de $\omega_1, \ldots, \omega_r$, on a

$$d(y_1, \ldots, y_r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} \frac{D(y_1, \ldots, y_r)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})} d(x_{i_1} \ldots x_{i_r}),$$

si $n \geqq r$, et

$$d(y_1, \ldots, y_r) = 0$$

si $n < r$.

Position du problème. — Ceci étant, nous voulons résoudre le problème suivant :

Trouver les relations entre les quantités $p_{i_1,\ldots,i_r}$ (*où* $i_1, \ldots, i_r$ *forment une combinaison quelconque de* r *des nombres* $1, \ldots, n$) *et* $x_1, \ldots, x_n$ *qui entraînent la relation*

$$(1) \quad \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_1},\ldots,x_{i_r}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad n \geqq r.$$

On obtient le problème communément appelé *problème de Pfaff* pour $r = 1$.

Le problème ne se pose que si $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas indépendants, mais au contraire sont fonctions de r paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Montrons d'abord que l'égalité (1) ne peut avoir lieu *quel que soit le système de fonctions de* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *qui représentent* $x_1, \ldots, x_n$, que si tous les p sont nuls.

En effet, l'équation (1) est équivalente à la suivante

$$\sum_{i_1} \left\{ \left[\sum_{i_2,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r} \frac{D(x_{i_2},\ldots,x_{i_r})}{D(\omega_2,\ldots,\omega_r)} \right] \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} \right\} = 0.$$

Or on peut, en laissant aux crochets des valeurs fixes, donner aux quantités $\frac{\partial x}{\partial \omega_1}$ des valeurs arbitraires puisque les x sont, par hypothèse, des fonctions absolument arbitraires des ω. Il faut donc que les crochets soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum_{i_2,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_2},\ldots,x_{i_r}) = 0 \qquad (i_1 = 1, \ldots, n),$$

en considérant $x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n$ comme des fonctions arbitraires de $\omega_2, \ldots, \omega_r$. Nous sommes ramenés au même problème où l'on a remplacé n, r

par $n-1$, $r-1$. En opérant successivement de la même manière, nous arriverons à l'égalité

$$\sum_{i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, dx_{i_r} = 0$$

qui doit avoir lieu quelles que soient les fonctions de ω_r qui représentent les x autres que $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}$. Par suite les p sont nécessairement nuls.

Solution du problème de Pfaff généralisé. — Ainsi l'équation (1) n'admet que la solution banale

$$p = 0$$

lorsque les x sont fonctions arbitraires de $\omega_1, \ldots, \omega_r$, c'est-à-dire fonctions arbitraires de r d'entre elles.

Ce cas est celui où toutes les $n-r$ relations indépendantes qui doivent exister entre les x pour que le problème ait un sens sont arbitraires. Voyons ce qui arrive lorsqu'on se donne un nombre déterminé $n-q$ de ces relations; soient

(2) $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad f_q(x_1, \ldots, x_n) = 0$

avec, nécessairement, $q \leqq n-r$.

Ces relations indépendantes sont résolubles par rapport à q des x; on peut donc les mettre sous la forme

(3) $x_1 = \varphi_1(x_{q+1}, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_q = \varphi_q(x_{q+1}, \ldots, x_n).$

Par suite, l'équation obtenue en remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par leurs expressions (3) dans (1) est une équation de même forme où n'entrent que les différentielles multiples de $x_{q+1}, \ldots, x_n$, r à r. Et cette équation devant avoir lieu quelles que soient les $n-q-r$ relations arbitraires qui doivent exister entre $x_{q+1}, \ldots, x_n$, les

coefficients des différentielles multiples qui y figurent doivent être nuls d'après ce qui précède. On a donc des équations qui déterminent d'une façon unique les $p_{j_1,\ldots,j_r}$ dans lesquels les j sont supérieurs à q

$$(4)\quad p_{j_1,\ldots,j_r}+\sum p_{i_1,\ldots,i_s,j_{k_1},\ldots,j_{k_{r-s}}}\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_s},x_{j_{k_1}},\ldots,x_{j_{k_{r-s}}})}{D(x_{j_1},\ldots,x_{j_r})}=0,$$

où $i_1, \ldots, i_s$ sont inférieurs à q et où $j_{k_1}, \ldots, j_{k_{r-s}}$ sont $r-s$ des nombres $j_1, \ldots, j_r$.

Les équations (3) et (4) forment donc la solution la plus générale de l'équation de Pfaff généralisée (1).

On voit que cette solution dépend de q fonctions arbitraires, q pouvant prendre les valeurs $1, \ldots, n-r$. Et elle détermine $q+C_{n-q}^r$ des quantités x, p en fonctions des $n-q+C_n^r-C_{n-q}^r$ autres.

On pourrait obtenir la solution générale en partant des équations non résolues (2) et en appliquant la méthode des multiplicateurs à l'équation (1) et aux équations

$$d f_j(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{r-1}})=0,$$

qui sont conséquences de (2).

Remarque. — Dans le même ordre d'idées, on pourrait être amené à généraliser la théorie des transformations de contact en cherchant à déterminer des fonctions $X_1, \ldots, X_n$, $P_{1,\ldots,r}, \ldots, P_{i_1,\ldots,i_r}, \ldots$ des variables $x_1, \ldots, x_n$, $p_{1,\ldots,r}, \ldots, p_{i_1,\ldots,i_r}, \ldots$ qui satisfassent à l'égalité

$$\sum P_{i_1,\ldots,i_r}\, d(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})=\sum p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}).$$

On aura *une* solution évidente (qui correspond aux transformations *prolongées* de Lie) en prenant pour $X_1, \ldots, X_n$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ qui définissent

une transformation réversible quelconque. Car alors les P seront des fonctions bien déterminées des x et des p, linéaires et homogènes par rapport aux p :

$$P_{i_1,\ldots,i_r} = \sum p_{j_1,\ldots,j_r} \frac{D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}{D(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})}.$$

Mais il semble que l'on doive chercher dans une autre voie une véritable généralisation de la théorie complète de Lie (en faisant intervenir des considérations de calcul fonctionnel).

[L²17eα]

POLYGONES GAUCHES DE PONCELET. EXTENSION DU THÉORÈME DE CAYLEY A L'ESPACE;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

1. Cayley a donné sous une forme remarquable les conditions de fermeture des polygones de Poncelet.

Le polygone de n côtés devant être

circonscrit à la conique S,
inscrit à la conique S',

et les invariants relatifs à ces deux coniques étant δ, θ, θ', δ', si la racine carrée du polynome

$$\delta + \theta h + \theta' h^2 + \delta' h^3,$$

discriminant de la forme $S + hS'$, est

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots,$$

les conditions de fermeture sont respectivement, pour

$n = 3, 5, 7, \ldots,$

$$C = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D & E \\ D & E & F \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots,$$

et, pour $n = 4, 6, 8, \ldots,$

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots.$$

Cayley a donné ce théorème en 1853 dans les *Philosophical Magazine :* il l'a déduit de la Théorie des fonctions elliptiques. Il a donné en 1861, dans le *Philosophical Transactions,* une démonstration simplifiée qui a été reproduite dans *The mathematical Papers of Cayley* (t. IV, p. 292). M. Lelieuvre a donné, en 1900, une démonstration du théorème de Cayley, dans *l'Enseignement mathématique*.

2. Extension du théorème de Cayley au cas de l'espace. — *Étant données une quadrique réglée* S *et une biquadratique gauche* C′ *tracée sur* S, *il est généralement impossible d'obtenir un contour gauche de* $2p$ *côtés, dont les côtés soient portés par des génératrices de* S *et dont les sommets soient sur* C′; *si un tel contour existe, il en existe une infinité.*

Soit S′ *une quadrique quelconque passant par* C′, *et désignons par* δ, θ, φ, θ', δ' *les invariants relatifs aux deux quadriques* S *et* S′; *la racine carrée du polynome*

$$\delta + \theta h + \varphi h^2 + \theta' h^3 + \delta' h^4$$

étant

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots,$$

les conditions de fermeture du polygone sont respec-

tivement, pour $2p = 4, 6, 8, \ldots,$

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots.$$

3. Afin de dégager la démonstration, je montrerai d'abord que, si les conditions indiquées sont satisfaites pour une certaine quadrique S' passant par la biquadratique C', elles le sont pour toutes. Le discriminant de la forme $kS + S'$ est

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \ldots;$$

si l'on remplace la forme S' par la forme $mS + S'$, on considère la forme $kS + (mS + S')$ ou $(k + m)S + S'$, dont le discriminant est

$$\delta(k + m)^4 + \theta(k + m)^3 + \varphi(k + m)^2 + \ldots,$$

ou

$$\delta k^4 + (\theta + 4m\delta)k^3 + (\varphi + 3m\theta + 6m^2\delta)k^2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a, pour la nouvelle quadrique S'_1,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta, \\ \theta_1 &= \theta + 4m\delta, \\ \varphi_1 &= \varphi + 3m\theta + 6m^2\delta, \\ \theta'_1 &= \theta' + 2m\varphi + 3m^2\theta + 4m^3\delta, \\ \delta'_1 &= \delta' + \ \ m\theta' + \ \ m^2\varphi + \ \ m^3\theta + m^4\delta. \end{aligned}$$

Au moyen des relations

$$\begin{aligned} A^2 &= \delta, & 2AB &= \theta, \\ 2AC + B^2 &= \varphi, & 2AD + 2BC &= \theta', \\ 2AE + 2BD + C^2 &= \delta', & AF + BE + CD &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots, & \ldots\ldots&\ldots, \end{aligned}$$

et en supposant, pour simplifier, $\delta = 1$, on trouve facilement

$$A_1 = A, \quad B_1 = B + 2m, \quad C_1 = C + Bm + m^2,$$

et ensuite

$$D_1 = D,$$
$$E_1 = E - Dm,$$
$$F_1 = F - 2Em + Dm^2,$$
$$G_1 = G - 3Fm + 3Em^2 - Dm^3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Dès lors, pour $2p = 8$ par exemple, la condition

$$\begin{vmatrix} D_1 & E_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & G_1 \\ F_1 & G_1 & H_1 \end{vmatrix} = 0$$

se ramène facilement à la même condition sans indice. A la dernière ligne on ajoute la précédente multipliée par $2m$ et la première multipliée par m^2; à la seconde ligne on ajoute la première multipliée par m; cela donne

$$\begin{vmatrix} D & E - Dm & F - 2Em + Dm^2 \\ E & F - Em & G - 2Fm + Em^2 \\ F & G - Fm & H - 2Gm + Fm^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On achève en opérant de même sur les colonnes.

Cela permet de supposer que la quadrique S' est l'un des quatre cônes du second degré qui passent par la biquadratique C'; on a alors

$$\delta' = 0.$$

4. La démonstration est maintenant facile. Les deux quadriques S et S′ seront dans les conditions requises si l'un des quatre cônes passant par la biquadratique, et le cône du même sommet circonscrit à S admettent des angles polyèdres de $2p$ côtés circonscrits au second et inscrits au premier; cela démontre la première partie du théorème. Pour la seconde partie, la quadrique S′ étant supposée être l'un des quatre cônes en question,

soient les équations des deux quadriques mises sous la forme

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + t^2 = 0,$$
$$(S') \qquad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 \qquad = 0;$$

les équations des deux cônes sont alors

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0,$$

et, si les cinq invariants relatifs aux deux quadriques sont δ, θ, φ, θ', o, les quatre invariants relatifs aux deux cônes sont δ, θ, φ, θ'. Dès lors les constantes A, B, C, ... sont les mêmes pour les deux cônes et pour les deux quadriques. Donc....

5. Si l'on annule le discriminant de la forme $kS + S'$, ce qui donne l'équation

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta' = 0,$$

et si l'on désigne par a, b, c, d les racines de cette équation, en supposant $\delta = 1$, les invariants θ, φ, θ', δ' sont des degrés 1, 2, 3, 4 par rapport à ces racines, et les quantités A, B, C, D, E, ... sont des degrés 0, 1, 2, 3, 4, ... : les degrés des conditions

$$D = 0, \qquad DF - E^2 = 0, \qquad \dots$$

sont donc 3, 3 + 5, ... ou $2^2 - 1$, $3^2 - 1$, ..., $p^2 - 1$ par rapport aux racines a, b, c, d.

6. *Exemples.* — On a

$$A = \sqrt{\delta}, \qquad B = \frac{\theta}{2\sqrt{\delta}}, \qquad C = \frac{4\delta\varphi - \theta^2}{8\delta\sqrt{\delta}},$$

et la condition $D = 0$, ou $2BC = \theta'$, relative au

cas $2p = 4$, devient

$$(2p = 4) \qquad \theta(\theta^2 - 4\,\delta\varphi) + 8\,\delta^2\theta' = 0.$$

On vérifie aisément cette condition en prenant comme tétraèdre de référence un tétraèdre dont les arêtes autres que DA et BC forment un contour quadrangulaire situé sur S et inscrit à S'.

La quadrique S étant donnée, et un contour quadrangulaire étant tracé sur cette surface, il est digne de remarque que toute quadrique S', simplement assujettie à passer par les quatre sommets de ce contour, donne lieu à une condition invariante. On peut écrire

$$(2p = 4) \qquad (d + a - b - c) \times \ldots \times \ldots = 0.$$

On a encore

$$(2p = 6) \quad (\sqrt{d-a} \pm \sqrt{d-b} \pm \sqrt{d-c}) \times \ldots = 0,$$

$$(2p = 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \big[(a + b - c - d)^2 \\ \quad \pm 4\sqrt{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}\big] \times \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Cette dernière condition, rendue entière, est du degré 4×3 ou 12, tandis que la condition par un déterminant est du degré 15; le premier membre de celle-ci renferme, en effet, un facteur étranger qui est le premier membre de la condition relative au cas $2p = 4$.

La forme des relations précédentes est en harmonie avec le fait que la quadrique S' est l'une quelconque des quadriques passant par la biquadratique C'; on peut en effet, dans ces relations, augmenter les quantités a, b, c, d d'une constante arbitraire $-m$.

7. *Autre énoncé du théorème.* — On a d'abord un théorème corrélatif en prenant une quadrique réglée S' et une biquadratique tangentielle C dont les plans oscu-

lateurs soient tangents à S'; on considère alors un contour dont les côtés soient portés par des génératrices de S' et dont les plans des angles soient osculateurs à C. On fait intervenir une quadrique quelconque S admettant pour plans tangents les plans osculateurs de C.

Comme deux quadriques réglées sont polaires, réciproques l'une de l'autre (par rapport à huit quadriques), on a encore ce théorème :

Étant données deux quadriques réglées S *et* S', *il est généralement impossible d'obtenir un contour gauche de* $2p$ *côtés situé sur* S *et ayant ses sommets sur* S', *ou un contour gauche de* $2p$ *côtés situé sur* S' *et ayant les plans de ses angles tangents à* S; *s'il existe un contour de l'une ou de l'autre nature, il existe une infinité de contours de l'une et de l'autre nature.*

Dans ce dernier cas, la même chose a lieu en remplaçant la quadrique S' *par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel déterminé par* S *et* S', ou *la quadrique* S *par une quadrique quelconque du faisceau tangentiel déterminé par* S *et* S'.

Les conditions de fermeture pour $2p = 4, 6, 8, \ldots$ *sont celles du n°* 2.

8. Le fait que l'on peut substituer indifféremment à la quadrique S' une quadrique..., ou à la quadrique S une quadrique..., correspond à des faits de calcul dont le mécanisme est facile à saisir.

Les équations ponctuelles des quadriques étant

$$S = 0, \qquad S' = 0,$$

le discriminant de la forme

$$kS + S'$$

est

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \ldots;$$

les équations tangentielles des deux quadriques, telles qu'on les déduit régulièrement de leurs équations ponctuelles, étant

$$\Sigma = 0, \qquad \Sigma' = 0,$$

le discriminant de la forme

$$l\Sigma' + \Sigma$$

est, avec des notations qui se comprennent aisément,

$$\Delta' l^4 + \Theta' l^3 + \ldots$$

ou

$$\delta'^3 . l^4 + \delta'^2 \theta . l^3 + \delta\delta' \varphi . l^2 + \delta^2 \theta' . l + \delta^3,$$

et le produit par $\delta\delta'$ est

$$\delta . \delta'^4 . l^4 + \theta . \delta\delta'^3 . l^3 + \varphi . \delta^2 \delta'^2 . l^2 + \theta' . \delta^3 \delta' . l + \delta' . \delta^4;$$

le discriminant de la forme

$$k\left(\frac{\Sigma'}{\delta'}\right) + \left(\frac{\Sigma}{\delta}\right),$$

multipliée par $\delta\delta'$, est donc

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta',$$

c'est-à-dire le discriminant de la forme $kS + S'$.

Sur des formes réduites, les équations ponctuelles des deux quadriques S et S′ étant

(S) $\qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$

(S′) $\qquad a'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$

leurs équations tangentielles, après division par δ et δ'

comme ci-dessus, sont

$$(\Sigma) \qquad A u^2 + B v^2 + \ldots = 0 \qquad \left(A = \frac{1}{a}, \ \ldots\right),$$

$$(\Sigma') \qquad A' u^2 + B' v^2 + \ldots = 0 \qquad \left(A' = \frac{1}{a'}, \ \ldots\right),$$

et les racines du discriminant de la forme $kS + S'$ (ou de la forme $k\Sigma' + \Sigma$) sont

$$-\frac{a'}{a}, \quad \ldots \quad \text{ou} \quad -\frac{A}{A'}, \quad \ldots;$$

que l'on remplace S' par $mS + S'$, ou Σ par $m\Sigma' + \Sigma$, ces racines augmentent de $-m$, et les conditions de fermeture continuent à être satisfaites si elles l'étaient primitivement.

Note. — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1904 (p. 433), j'ai indiqué comme probable une extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, pour des polyèdres de genre *un*. J'ai réussi à démontrer complètement le théorème pour $p = 3$, $q = 3$ (*Bulletin de la Société mathématique*). Pour $p = 4$, $q = 4$, avec les notations de la Note actuelle, la condition est

$$b + c + d - a = 0;$$

la condition

$$b + c = d + a$$

est relative au cas singulier où, les sommets du polyèdre se confondant deux à deux, ce polyèdre se transforme en un polyèdre à 8 sommets, 8 faces, 16 arêtes, qui est précisément le polyèdre signalé par M. Bricard. Cette dernière condition est en même temps celle que l'on a obtenue ci-dessus pour $2p = 4$.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure; par M. *E. Borel*, rédigées par M. Fréchet et augmentées de Notes de MM. Painlevé et Lebesgue. — 1 vol. grand in-8° de x-160 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905. Prix : 4fr,50.

Ce Volume fait partie de la collection de monographies sur la *Théorie des fonctions* publiée sous la direction de M. Borel. Comme les autres, il est complet en lui-même et n'exige pas forcément de retour sur les Volumes précédents. C'est ainsi qu'il débute en présentant la Théorie des ensembles, surtout au point de vue de son utilité pour ce qui suivra, bien que cette théorie ait déjà été exposée dans les *Leçons sur la Théorie des fonctions*. Le premier Chapitre semble, au premier abord, un peu aride, mais on voit rapidement que les travaux modernes relatifs à la Théorie des fonctions ont impérieusement exigé des perfectionnements et des créations successives dans la Théorie des ensembles qui, d'ailleurs, ne s'en sépare plus guère. Ainsi, quant aux nouveautés intéressantes et en dehors des travaux de M. Borel lui-même, nous signalerons particulièrement une extension de l'idée de mesure d'un ensemble, due à M. Lebesgue, et, quelques pages plus loin, celle de catégorie d'un ensemble due à M. Baire.

En abordant la notion de continuité, nous trouvons d'abord la définition de l'oscillation d'une fonction, puis la fonction continue elle-même définie en un point par ce fait que son oscillation est nulle en ce point, l'idée de la mesure d'une discontinuité et celle de fonction ponctuellement discontinue. Le Chapitre se termine par un résumé des travaux de M. Lebesgue sur les fonctions intégrables.

Le Chapitre III étudie de façon tout à fait générale les séries de fonctions réelles et rappelle d'abord les travaux de

MM. Osgood et Arzela. Le point important est surtout de savoir si une série de fonctions continues représente toujours une fonction continue; il n'en est rien, sauf d'abord le cas de *convergence uniforme;* mais, ainsi que M. Bendixson l'a montré, ce n'est pas là une condition *nécessaire.*

La condition à la fois nécessaire et suffisante est due à M. Arzela qui est ainsi amené à introduire une nouvelle notion : celle de *convergence quasi-uniforme.* Nous voyons ensuite rapidement l'intégration des séries avec les nouveaux perfectionnements dus à M. Lebesgue.

Toutes ces considérations vont trouver leur application dans le Chapitre IV où nous abordons l'étude des séries de polynomes comme séries formées de fonctions continues fort simples. Les premières méthodes proposées pour obtenir de tels développements reposent, au fond, sur la considération de fonctions analytiques de deux variables pouvant se réduire pour une valeur bien déterminée, mais exceptionnelle, de l'une des variables à une fonction de l'autre non forcément analytique. Si la première variable ne prend pas exactement la valeur exceptionnelle en question mais s'en approche, on aura un développement analytique représentant une fonction qui peut ne pas l'être, non pas, bien entendu, de façon rigoureuse, mais avec l'approximation qu'on voudra. Tels sont, au fond, les méthodes de Weierstrass et de M. Picard.

D'autres démonstrations sont fondées sur la propriété d'approcher, autant qu'on le veut, d'une ligne continue au moyen de contours polygonaux, ou bien sur l'emploi des séries trigonométriques, méthodes qui ont l'avantage de présenter un caractère assez élémentaire. Ces résultats s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables, et M. Borel rappelle ensuite les travaux de M. Painlevé sur la représentation des fonctions par des polynomes lorsque ces fonctions admettent des dérivées jusqu'à un certain ordre et que l'on veut représenter à la fois la fonction et ses dérivées par une série de polynomes et les dérivées de celle-ci prises terme à terme. Le résultat est simple et revient à représenter d'abord $f^{(n)}(x)$, puis à remonter à $f(x)$ par des intégrations successives. M. Borel expose ensuite un procédé de développement dont l'idée, je crois, lui appartient en propre, et dans lequel chaque terme est de la nature du terme d'une série trigonométrique augmenté d'un polynome. Nous abordons ensuite un sujet

prodigieusement intéressant. Les procédés précédents ne sont-ils pas d'une science un peu oiseuse? Une fonction continue ne peut-elle pas être représentée avec l'approximation qu'on veut, sous forme d'un polynome, en employant tout simplement la formule d'interpolation de Lagrange? M. Borel montre qu'il n'en est rien et donne un fort bel exemple d'un cas où la formule de Lagrange donne des approximations de moins en moins satisfaisantes; il rappelle aussi des conclusions analogues dues à MM. Mittag-Leffler et Runge et essaie de donner une théorie générale de l'interpolation non soumise aux inconvénients précédents.

Dans le Chapitre V et dernier, nous étudions la représentation des fonctions discontinues, théorie presque entièrement dominée par les belles recherches de M. R. Baire qui prouvent que la continuité n'est pas une condition nécessaire, quant au développement en série de polynomes, et qui définissent nettement la nature des discontinuités des fonctions susceptibles d'admettre de semblables développements.

L'Ouvrage comprend ensuite une Note fort importante de M. P. Painlevé où il s'agit aussi d'un mode de développement en séries de polynomes, mais en se plaçant exclusivement au point de vue des fonctions analytiques. C'est le problème intéressant résumé déjà par M. Hadamard dans son Ouvrage : *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collection Scientia). Il s'agit, en effet, de développements qui ne sont plus astreints, comme les séries de Taylor, à converger dans des cercles, mais peuvent converger dans tout le plan, sauf peut-être sur un certain système de demi-droites formant *étoile*. La méthode de M. Painlevé revient aussi, au fond, à considérer des fonctions analytiques de plusieurs variables que l'on développe d'abord par rapport à l'une d'elles. Si l'on donne à celle-ci la valeur particulière 1, nous avons un développement par rapport aux autres variables, somme des coefficients de la série primitive, développement admettant d'ailleurs des transformations dans le détail desquelles il serait trop long d'entrer ici, transformations jouant un rôle fondamental dans les recherches de M. Painlevé et qui dépendent elles-mêmes de transformations conformes.

Après cette savante Note, nous en trouvons une seconde dans laquelle M. Lebesgue revient sur la démonstration des résultats fondamentaux dus à M. Baire, et une troisième de

M. Borel, en laquelle l'auteur étudie la classification des *fonctions discontinues*, proposée encore par M. Baire, et montre la fécondité de cette nouvelle notion en rappelant que ces classes contiennent bien chacune effectivement une infinité de fonctions définies dans la classe *n* par une série de polynomes *n*-uple.

A. Buhl (Montpellier).

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE.

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Une plaque* P *circulaire, infiniment mince, homogène, est mobile autour de son centre* O *qui est fixe.*

Une sphère homogène S, *de centre* G, *est percée suivant un diamètre par un canal de section infiniment petite.*

Un axe fixe OZ, *issu de* O, *traverse ce canal :* S *peut donc tourner autour de* OZ, *et glisser le long de cet axe. De plus* S *est assujettie à rester en contact avec le plan de* P.

Les seules forces agissant sur le système proviennent des liaisons; il n'y a pas de frottement. P *et* S *ont même masse m et même rayon a.*

1° *Former les équations déterminant le mouvement du système.*

2° *En appelant* OZ_1 *l'axe normal à la plaque dirigé du côté de* S, *étudier comment varie, au cours du mouvement, l'angle* θ *des axes* OZ *et* OZ_1. *On supposera qu'à l'instant initial on ait* $\sin\theta \neq 0$, *et* $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

3° *Comment doit-on choisir les autres données initiales pour que* G *demeure immobile; que sont alors les réactions?*

Épreuve pratique. — *Un solide pesant* S *de masse m est limité par un ellipsoïde dont les axes sont* $2a$, $2b$, $2c$; *on suppose* $a > b > c$.

On fixe, sur une même horizontale Δ, *les sommets* A, B

correspondant respectivement à l'axe majeur et à l'axe moyen.

Calculer le moment d'inertie de S *relativement à* Δ *et la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé ainsi constitué.*

On imprime à S, *supposé immobile dans la position d'équilibre stable, une percussion* mv *dirigée suivant l'axe mineur de l'ellipsoïde : déterminer* v *de façon que l'angle d'écart maximum que peut faire* S *avec sa position initiale ait une valeur donnée* θ_0. *Calculer la vitesse de rotation de* S *immédiatement après la percussion.*

Applications numériques (*unités* C.G.S.) : $m = 300^{g}$; $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$, $c = 2^{cm}$; $\theta_0 = 60°$; $g = 981^{cm}$.

(Juillet 1904.)

Épreuve écrite. — *Deux points matériels* M, M' *de même masse* m *se meuvent respectivement dans deux plans* P, P' *parallèles entre eux et parfaitement polis. Ces points agissent l'un sur l'autre, leur action mutuelle est une fonction connue de leur distance. Déterminer le mouvement des deux points.*

Étudier ce mouvement dans le cas particulier où l'action mutuelle est une attraction inversement proportionnelle au cube de la distance, les vitesses initiales des deux points étant perpendiculaires à la droite qui les joint, égales en grandeur, mais de directions opposées.

Soient Gx, Gy, Gz *des axes rectangulaires de directions fixes menés par le centre de gravité* G, *le plan* xGy *étant parallèle à* P; *soit* M_1 *la projection de* M *sur* xGy.

On déterminera la position des points :

1° *Par celle du centre de gravité;*

2° *Par les coordonnées polaires* r, θ *de* M_1, Gx *étant l'axe polaire.*

Appeler $2a$ *la distance des plans* P, P'.

On suppose que la valeur absolue de l'attraction, dans la deuxième partie du problème, est $8mk^2$, *lorsque les deux points sont à l'unité de distance.*

Solution.

A l'aide du théorème des quantités de mouvement proje-

tées, on montre que G se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Les axes $Gxyz$ sont animés d'un mouvement de translation uniforme, les équations du mouvement, rapporté à ces axes, sont les mêmes que si ces axes étaient fixes. Le théorème des moments par rapport à l'axe Gz et celui des forces vives donnent deux intégrales premières permettant d'exprimer le temps t et l'angle θ en fonction de r par des intégrales définies.

Dans la seconde partie du problème, la discussion demandée revient à celle d'un trinome bicarré en r dont on connaît déjà deux racines, r_0 et $-r_0$, r_0 étant la valeur initiale de r.

Épreuve pratique. — *Soit* $Oxyz$ *un trièdre trirectangle fixe,* Oz *étant vertical et dirigé vers le haut.*

Un solide pesant S *peut tourner autour de* Oz *et glisser le long de cet axe. De plus, un point* A *de* S *doit rester à une distance constante d'un point fixe* B. *Ces liaisons sont sans frottement.*

S *atteint une position d'équilibre stable lorsque son centre de gravité est aussi bas que le permettent les liaisons. On admet que* Ox *passe par la position correspondante de* A. *Le point* B *est situé dans le plan* zOx, *ses coordonnées sont* $x = b$, $y = 0$, $z = h$. *On désigne par* a *la distance constante de* A *à* Oz, *par* m *la masse de* S, *par* I *son moment d'inertie relativement à* Oz :

1° *On fait tourner* S *d'un angle* θ *autour de* Oz (*à partir de la position d'équilibre*). *Évaluer le glissement correspondant, c'est-à-dire la cote* z *du point* A *après la rotation;*

2° *Pour maintenir* S *en équilibre dans cette position, on fait agir sur lui un couple dont l'axe est parallèle à* Oz. *Calculer le moment* μ *de ce couple;*

3° *Trouver la durée* T *des oscillations infiniment petites du solide autour de la position d'équilibre stable.*

Application numérique (2° *et* 3°) :

$a = 1^{cm}$, $b = 3^{cm}$, $h = 30^{cm}$. *L'angle* θ *est de* 30'. S *est un cercle homogène de* 1^{cm} *de rayon, de masse égale à* $0^g,1$; *enfin* Oz *est un diamètre de* S. *L'accélération de la pesanteur* g, *en unités* C.G.S., *est* 981.

SOLUTION.

La première partie du problème précédent n'offre aucune difficulté; la seconde se traite à l'aide du principe des vitesses virtuelles, la troisième par la méthode classique.

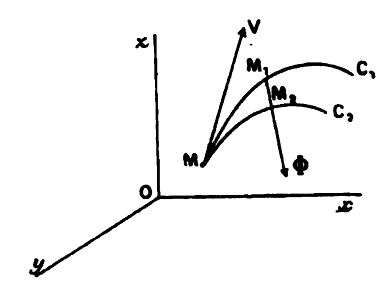
Voir, à ce sujet, la théorie de la balance bifilaire, dans les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (t. II), de MM. Mascart et Joubert. (Novembre 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Application du théorème de Coriolis aux mouvements relatifs à la surface de la Terre, eu égard à la rotation de la Terre.*

II. *Mouvement apparent du pendule sphérique. Cas particulier de l'expérience de Foucault.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un trièdre* $Oxyz$ *est animé d'un*



mouvement quelconque. Un point matériel lancé à l'instant t *d'une position* M *avec une vitesse relative* V *décrirait, sous l'action d'un certain milieu, une trajectoire apparente* C_1 *et, sous l'action d'un autre milieu, une trajectoire apparente* C_2, C_1 *et* C_2 *étant tangentes à* V *en* M. *Soient* M_1 *et* M_2 *les positions qu'aurait occupées dans les deux cas le mobile à l'instant* $t + \Delta t$. *Calculer la limite du vecteur* $\Phi = \dfrac{\overline{M_1 M_2}}{\Delta t^2}$ *quand* Δt *tend vers zéro, et démontrer que ce vecteur est indépendant du mouvement des axes de coordonnées.*

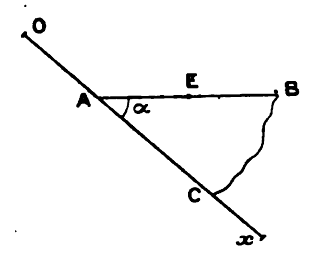
II. *Un disque circulaire homogène infiniment mince de masse m et de rayon* R *se meut dans son plan. A un instant donné, le centre instantané de rotation est un point* A *de la circonférence du disque.*

Brusquement, par une percussion, on fixe un point B *de la circonférence tel que l'arc* AB *soit le tiers de la circonférence. On demande le nouveau régime des vitesses des points du disque après cette percussion.*

(Novembre 1904.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Dans un plan vertical, on donne une droite fixe* Ox *inclinée d'un angle* α *sur l'horizontale.*



Sur cette droite glisse sans frottement une plaque ABC *dont le bord supérieur* AB *est horizontal, et dont le bord* AC *s'appuie sur* Ox.

Le point A *est relié au point fixe* O *par un fil élastique dont on néglige la masse et qui s'allonge proportionnellement à la tension. Il doublerait de longueur sous l'action d'un poids égal à celui de la plaque.*

Sur le bord AB *de la plaque est placé un point* E *pesant dont le poids est égal à celui de la plaque. Ce poids peut glisser sans frottement sur* AB.

Étudier le mouvement de ce système en supposant que les vitesses initiales sont nulles et que le fil OA *a primitivement sa longueur naturelle.*

Si le bord AB *de la plaque était dépoli, que devrait être le coefficient de frottement pour que le point* E *ne glisse pas sur* AB?

SOLUTION.

Le point E décrit une verticale. Soit N la pression de la plaque sur le point E, soit OA $= x$, soient m la masse de la plaque et a la longueur primitive du fil, on a en projection sur Ox

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha + \mathrm{N}\sin\alpha - mg\frac{x-a}{a},$$

et en projection verticale

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha = mg - \mathrm{N},$$

On tire de là

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{(1+\sin^2\alpha)a}[x - a(1+2\sin\alpha)] = 0.$$

D'où, en tenant compte des valeurs initiales,

$$x = a(1+2\sin\alpha) - 2a\sin2\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a(1+\sin^2\alpha)}}\,t\right),$$

on a un mouvement oscillatoire.

S'il y a frottement et si E est fixe sur la plaque, le point et la plaque ne font qu'un corps et l'on a

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\sin\alpha - g\frac{x-a}{a},$$

ce qui détermine x.

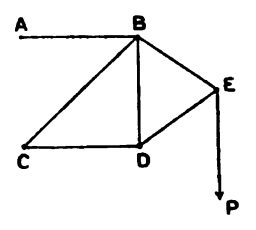
L'équilibre relatif de E s'obtient en ajoutant la force d'entrainement dont la projection $m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha$ doit faire équilibre au frottement Nf. On trouve N comme plus haut, et Nf s'exprime en fonction de x. Il faut que f soit au moins égal au maximum de la valeur trouvée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En deux points fixes* A *et* C *situés sur une même verticale sont articulées des tiges* AB, CB, CD.

En B *et* D *sont articulées des tiges* BD, BE, DE.

Les deux dernières sont articulées en E.

La figure ABCD *est un carré, la figure* BDE *est un triangle équilatéral.*



En E *on suspend un poids* P *de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des tiges.*

On calculera et l'on graphiquera.

(Novembre 1904.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *Soit* S *un solide rigide formé par un cône homogène de hauteur* $h = 80^{cm}$ *égale au diamètre de sa base, et par une demi-sphère homogène limitée à cette base, la densité de la demi-sphère étant la moitié de celle du cône.*

Le sommet O *du cône étant supposé fixe, combien faut-il imprimer de tours par seconde à l'axe du solide* S *placé horizontalement pour que la nutation, dans le mouvement de ce solide abandonné à l'action de son poids, ait une amplitude de* 30°? *Quelle est alors la période de la nutation? Quelle est la vitesse de précession au commencement et à la fin de chaque période? Quelle est la forme de la courbe décrite par la projection du centre de gravité du solide* S *passant par* O?

(Juillet 1904.)

Épreuve écrite. — *Un point matériel pesant est assujetti à ne pas quitter la circonférence d'un cercle vertical, de rayon égal à* $3^{m},50$, *qui tourne d'un mouvement uniforme autour de son diamètre vertical* $z'Oz$ *en faisant* 32 *tours par minute.*

On abandonne le point matériel à midi, sans vitesse initiale, en un point donné A_0 du cercle vertical; soit θ_0 l'angle que fait le rayon OA_0 avec la nadirale Oz. Étudier le mouvement du point matériel pour toutes les valeurs de θ_0 comprises entre 75° et 76°. Calculer en particulier la position qu'il occupe à 6^h du soir.

(Novembre 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un cerceau C homogène et pesant glisse sans frottement dans un plan vertical xOy sur une droite fixe Ox, inclinée de 45° sur la verticale. A l'intérieur de C glisse sans frottement un autre cerceau Γ, homogène, pesant et de même masse que le premier, mais de rayon deux fois moindre.*

1° *Étudier le mouvement du système abandonné sans vitesse dans le plan vertical xOy, en une position où les points de contact de C avec Ox et avec Γ coïncident. Calculer les réactions de C sur Ox et sur Γ.*

2° *Traiter la même question en supposant que Γ, au lieu de glisser sans frottement, engrène sur C de manière à rouler sans glisser.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de révolution est vertical et a une longueur de 40^{cm}, et dont l'équateur a un rayon de 10^{cm}, renferme une masse gazeuse de 10^g, pesante et en équilibre isotherme. On admet que, en chaque point, la densité du gaz est égale à la pression mesurée en unités C.G.S.*

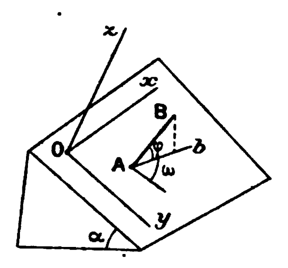
Démontrer que les pressions exercées par le gaz sur les parois (supposés solides) du demi-ellipsoïde situé au-dessous du plan de l'équateur ont une résultante unique et calculer cette résultante unique en dynes. L'accélération g de la pesanteur sera prise égale à 980.

(Octobre 1904.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Deux côtés d'un triangle glissent sur deux circonférences fixes; montrer que le troisième côté enveloppe également une circonférence.*

II. *Une barre homogène pesante dont une extrémité s'appuie et peut glisser sans frottement sur un plan incliné est abandonnée,* SANS VITESSE INITIALE, *à l'action de*



la pesanteur; étudier son mouvement. Réaction du plan.

Notations :

α, *angle aigu du plan incliné avec l'horizon; on définira la position de la barre en donnant les coordonnées* (x, y) *de l'extrémité* A *qui appartient au plan incliné, l'angle* φ *que fait* AB *avec sa projection* Ab *sur ce plan et l'angle* ω *de* Ab *avec la ligne de plus grande pente du plan dirigé vers le bas;*

$2l$, *longueur de la barre;*

m, *sa masse;*

Ox, *horizontale du plan;*

Oy, *ligne de plus grande pente dirigée vers le bas;*

Oz, *normale au plan vers le haut* (*trièdre direct*).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'ellipsoïde principal d'inertie qui correspond à un tétraèdre homogène. Moments principaux.* (PROBLÈME AUXILIAIRE : *En décomposant le tétraèdre en volumes élémentaires par des plans parallèles à l'une des faces, on calculera le moment d'inertie du tétraèdre par rapport à un plan quelconque passant par le quatrième sommet.*) (Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une porte rectangulaire homogène est fixée par deux gonds à un axe faisant un angle* α *avec la verticale; on lui fait faire un angle* β *avec le plan vertical passant par l'axe et on l'abandonne à elle-*

même. Trouver le mouvement et les pressions sur les gonds. Oscillations infiniment petites, leur période.

II. *On considère une figure plane invariable* F, *mobile dans un plan et un point fixe* A *de ce plan. Quel est le lieu des points* M *de la figure* F *pour lesquels le rayon vecteur* AM *balaie dans un temps déterminé* (t_0, t_1) *une aire donnée?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule simple oscille dans un milieu raréfié; la résistance très petite comprend un terme proportionnel à la vitesse et un terme proportionnel au carré de la vitesse. On demande l'expression approchée du mouvement dans une oscillation complète (montée, descente) en supposant que ces deux termes sont des infiniment petits du premier ordre ainsi que l'amplitude de l'oscillation.*

NOTA. — *Pousser l'approximation jusqu'au troisième ordre.* (Novembre 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un cercle non homogène, pesant, situé dans un plan vertical, peut rouler sur une droite horizontale de ce plan, assez rugueuse pour empêcher tout glissement.*

Trouver le mouvement du cercle.

Calculer les composantes de la réaction de la droite.

II. *Deux points matériels non pesants, de masses égales, sont mobiles sans frottement sur une circonférence fixe et se repoussent proportionnellement à la distance. Trouver leur mouvement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parallélépipède rectangle, homogène, pesant, est mobile autour de sa plus petite arête supposée horizontale et fixe.*

Les longueurs des trois arêtes sont respectivement

$$0^m,8, \quad 0^m,6, \quad 0^m,2.$$

Calculer, à $\frac{1}{1000}$ de seconde près, la durée d'oscillation de ce pendule dans le vide.

L'accélération de la pesanteur est de $9^m,81$ *par seconde.*

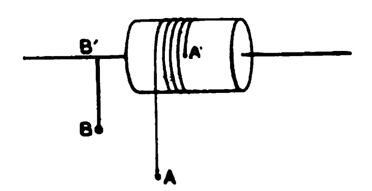
(Novembre 1904.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un tambour léger de* $0^m,25$ *de rayon est monté sur un axe horizontal qui peut tourner librement sur lui-même.*

Sur ce tambour est enroulé un fil inextensible dont l'une des extrémités A' *est attachée au tambour. Un poids de*



20^{kg} *est fixé à l'extrémité* B *d'un bras rigide* B'B *de* $0^m,50$ *de longueur monté d'équerre sur l'axe horizontal et faisant corps avec lui.*

On néglige le poids du tambour, du fil et du bras.

1° *Étudier les petites oscillations du système quand on accroche, sans choc, à l'extrémité libre* A *du fil un très petit poids* a.

2° *Déterminer les positions d'équilibre du système, en supposant que le poids accroché en* A *soit quelconque et non plus très petit. Condition de possibilité de l'équilibre.*

3° *Démontrer qu'il existe une valeur* α *du poids* a *pour laquelle le système, lâché sans choc, tend, sans osciller, vers l'une des positions d'équilibre. Trouver à* 1° *près*

l'angle, avec la verticale inférieure, du bras B'B *dans cette position d'équilibre.*

4° *Montrer qu'en accrochant sans choc en* A *un poids* $2a$ *le système prendra un mouvement continu de rotation et déterminer les vitesses angulaires successives à chaque passage du bras* B'B *par la verticale inférieure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a donné à une certaine variable* x *les valeurs successives*

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,$$

et l'on a obtenu, pour une fonction y *de cette variable, les valeurs correspondantes*

$$0,\quad 103,\quad 252,\quad 439,\quad 668,\quad 932.$$

1° *Vérifier, par l'examen des différences, que la fonction* y *peut être convenablement représentée par la formule*

$$y = ax + bx^2.$$

2° *Tirer le parti le plus avantageux des observations ci-dessus pour la détermination des constantes* a *et* b.

(Novembre 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$x^3 = ay^2,$$

a *désignant une constante.*

1° *Indiquer le nombre des normales que l'on peut mener à la courbe d'un point de* Ox.

2° M *désignant un point de la courbe et* M' *le point symétrique par rapport à* Ox, *trouver le lieu du point d'intersection de la tangente en* M *avec le rayon vecteur* OM' *quand* M *décrit* (Γ).

3° *Calculer l'aire comprise entre l'arc* OM *de la courbe* (Γ) *et la corde* OM, *ainsi que les volumes* (V) *et* (W) *engendrés par la rotation de cette aire respective-*

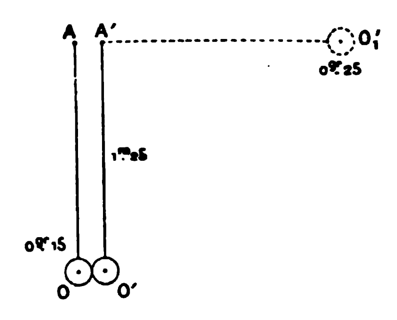
ment autour de Ox *et de* Oy; *déterminer le point* M *de telle sorte que* (V) *et* (W) *soient égaux.*

4° *Le volume* (V) *étant supposé rempli d'une matière pesante dont la densité en chaque point est* $\frac{\mu}{(x+a)^2}$, μ *représentant une constante, calculer la masse totale renfermée à l'intérieur de ce volume.*

5° *Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes engendrée par* (Γ) *quand le paramètre* a *varie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Théorème des moments des quantités de mouvements. Équation du mouvement d'un solide mobile sans frottement autour d'un axe fixe.*

II. *Deux pendules simples* AO *et* A'O' *sont disposés de manière qu'au repos les deux très petites masses* O *et* O',



supposées sphériques, soient tangentes, et que leur ligne des centres OO' *soit horizontale. On écarte le pendule* O'A' *de manière à le placer horizontalement en* $A'O'_1$, *dans le plan* A'AO, *puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Il se produit alors un choc, après lequel les deux sphères* O *et* O' *s'élèvent à des hauteurs* h *et* h' *au-dessus de l'horizontale* OO'. *On demande de calculer ces deux hauteurs* h *et* h', *en supposant que les deux sphères* O *et* O' *soient parfaitement élastiques.*

Données : la longueur du pendule A'O' *est de* $1^m,25$; *les poids des sphères* O *et* O' *sont respectivement de* $0^g,25$ *et* $0^g,15$. (Novembre 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnée la chaînette*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

(*a constante positive*) *qui coupe l'axe* Oy *au point* A, *on prend sur cette courbe un point* M, *d'abscisse* x *et l'on abaisse de ce point la perpendiculaire* MP *sur* Ox; *puis on fait tourner la figure autour de l'axe* Ox.

Calculer :

1° *Le volume engendré par l'aire* OAMP;

2° *L'aire engendrée par l'arc* AM.

II. *L'expression*

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy$$

est-elle une différentielle totale?

En supposant que x *et* y *désignent les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy$$

le long d'une courbe allant du point $x=0$, $y=0$ *au point* $x=2$, $y=4$.

III. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + ky = 0,$$

où k *est une constante donnée.*

Quelles sont les différentes formes de l'intégrale générale suivant les valeurs de k?

Examiner en particulier les cas

$$k = 1, \qquad k = 2, \qquad k = -3.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un point pesant* M *est attiré par un point fixe* A *proportionnellement à la distance. Quand le point* M *est placé en* O *à une distance* AO $= a$ *au-dessous du point* A, *l'attraction de* A *sur le point* M *est égale et opposée au poids du point.*



Trouver le mouvement du point M, *en supposant qu'il soit abandonné sans vitesse au point* A. *Quelle est la durée de l'oscillation du point* M? *Quelle est sa vitesse quand il arrive en* O?

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *En employant le système* C.G.S., *on suppose*

$$a = 10^{\text{cm}}, \qquad g = 980.$$

II. *Calculer les intégrales définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^4 x\, dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\, dx$$

à 0,01 *près.* (Octobre 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1929.

(1902, p. 238.)

Étant donnés deux points fixes F, A *et une droite* Δ :

1° *On considère les paraboles de foyer* F *qui passent par* A. *Lieu des pôles des droites qui joignent* A *aux points où ces paraboles coupent* Δ.

2° *On considère les cercles passant par* F *et tangents à* Δ. *Enveloppe des droites qui joignent les points de contact de* Δ *aux points de contact des tangentes issues de* A.

(*Alpha.*)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

I. Prenons pour axes de coordonnées AF et la perpendiculaire à cette droite menée par A; soit $AF = a$.

La directrice d'une des paraboles considérées sera tangente au cercle de centre A et de rayon a; ce sera donc

$$x\cos\theta + y\sin\theta - a = 0,$$

et la parabole Π aura pour équation

$$(x-a)^2 + y^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta - a)^2$$

ou

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 + 2a(\cos\theta - 1)x + 2a\sin\theta y = 0.$$

Soient $y = tx$ une droite AM et $y = mx + n$ la droite Δ. Exprimons que ces deux droites se coupent sur Π. Leur point de rencontre est

$$x = \frac{n}{t-m}, \qquad y = \frac{nt}{t-m}.$$

En écrivant que ce point est sur Π, nous obtenons

$$(1) \quad n(\sin\theta - t\cos\theta)^2 + 2a(\cos\theta - 1 + t\sin\theta)(t-m) = 0.$$

Le pôle de AM est à la rencontre de la tangente à Π en A et du diamètre correspondant à la direction t.

Ces deux droites ont respectivement pour équation

$$(2) \qquad y = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}x,$$

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l}(x\sin\theta - y\cos\theta)(\sin\theta - t\cos\theta) \\ \qquad + a(\cos\theta + t\sin\theta - 1) = 0.\end{array}\right.$$

Le lieu cherché s'obtiendra en éliminant θ et t entre les équations (1), (2), (3). La relation (1) peut s'écrire, en tenant compte de (3),

$$(1') \quad n(\sin\theta - t\cos\theta) - 2(x\cos\theta - y\sin\theta)(t-m) = 0.$$

De (2), on tire

$$\sin\theta = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Les relations (1') et (3) deviennent

$$n[2xy - t(x^2-y^2)] - 2y(x^2+y^2)(t-m) = 0$$

et

$$y[2xy - t(x^2-y^2)] + 2a(txy - y^2) = 0,$$

ou bien

$$2nxy + 2my(x^2+y^2) - [n(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)]t = 0,$$
$$2xy - 2ay - (u^2 - y^2 - 2ax)t = 0.$$

Le lieu cherché est donc

$$(x^2-y^2-2ax)[nx + m(x^2+y^2)]$$
$$-(x-a)[n(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)] = 0$$

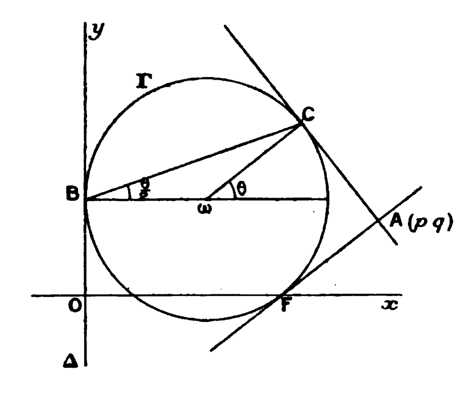
ou

$$(x^2+y^2)(mx^2 - 2xy - my^2 - 2amx + 2ay - an) = 0.$$

C'est donc l'hyperbole équilatère

$$m(x^2-y^2) - 2xy - 2amx + 2ay - an = 0.$$

II. Pour traiter la seconde partie, je prends comme axes la



droite Δ et FO perpendiculaire à Δ. Le centre ω d'une des circonférences Γ décrit une parabole de foyer F et de direc-

trice Δ; ses coordonnées sont donc, en posant FO $= d$,

$$\frac{\beta^2+d^2}{2d} \quad \text{et} \quad \beta.$$

Les coordonnées d'un point C de Γ sont

$$X = \frac{\beta^2+d^2}{2d}(1+\cos\theta),$$

$$Y = \beta + \frac{d^2+\beta^2}{2d}\sin\theta = \frac{(d^2+\beta^2)\sin\theta + 2d\beta}{2d},$$

et la tangente en C a pour équation

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta &= X\cos\theta + Y\sin\theta \\ &= \frac{(d^2+\beta^2)(1+\cos\theta)+2d\beta\sin\theta}{2d}. \end{aligned}$$

J'exprime qu'elle passe au point $A(p, q)$:

$$2d(p\cos\theta + q\sin\theta) = (d^2+\beta^2)(1+\cos\theta) + 2d\beta\sin\theta$$

ou, en posant $\tan g\frac{\theta}{2} = t$,

$$(4) \qquad \beta^2 + dpt^2 + 2d\beta t - 2dqt + d^2 - pd = 0.$$

La droite BC a pour équation

$$y - \beta = x\tan g\frac{\theta}{2} \qquad \text{ou} \qquad y - tx - \beta = 0.$$

La relation (4) entre les paramètres β et t montre que cette droite enveloppe une conique. L'équation ponctuelle de cette conique s'obtient aisément. C'est

$$\begin{aligned} &(d-p)(x^2-y^2) - 2qxy \\ &\quad + 2d(p-d)x + 2dqy + d(pd - p^2 - q^2) = 0, \end{aligned}$$

hyperbole équilatère.

Remarque. — On aurait pu se dispenser de chercher l'enveloppe de BC par le calcul. Transformons, en effet, la figure par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle de centre F et de rayon FO.

La polaire réciproque de la circonférence ω est une parabole Π de foyer F passant en O, pôle de Δ. Au point fixe A correspond une certaine droite Δ_1 fixe. La polaire de B passe en O; c'est la tangente en O à Π.

A la droite AC correspond un point I de Π situé à l'intersection de Δ_1 avec la polaire de C; mais cette polaire est la tangente à Π en ce point. Le pôle de BC est donc à l'intersection U des tangentes à Π en O et en I, ce dernier point étant un de ceux où Π rencontre Δ_1. La recherche de l'enveloppe de BC revient donc à la recherche du lieu de U qui fait l'objet de la première partie de ce problème.

QUESTIONS.

2011. Sur la normale au point *m* d'une ellipse de centre *o*, et extérieurement à cette courbe, on porte le segment *mp* égal au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en *m*.

Démontrer que les droites *pm*, *po* sont également inclinées sur les tangentes à l'ellipse issues de *p*. (MANNHEIM.)

2012. Le polyèdre homogène à un seul côté de Möbius a six sommets pentaèdres A, B, C, D, E, F, et dix faces triangulaires,

BCD, CDE, DEF, EFB, FBC,
ABD, ADF, AFC, ACE, AEB,

en mettant par exemple en évidence l'angle pentaèdre en A. La quadrique qui touche les plans des faces autres que EFD, et celle qui touche les plans des faces autres que EFB, ont leurs points de contact avec le plan ADB en ligne droite avec A, puisqu'elles touchent cinq mêmes plans issus de A; démontrer que le conjugué harmonique de A par rapport à ces points de contact est sur DB. (On peut remplacer A par C.)

(G. FONTENÉ.)

TABLE DES MATIÈRES.

Mars 1905.

Pages.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.
(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

AVRIL 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[L¹1a]

SUR LA THÉORIE DES CONIQUES;

Par M. HADAMARD.

1. Les propriétés fondamentales, telles que les considère la Géométrie élémentaire, se divisent en deux catégories très distinctes. Les unes sont focales, les autres projectives.

Le passage des unes aux autres me paraît laisser encore à désirer sous le rapport de la simplicité.

Pour passer, par exemple, de la définition focale de l'ellipse à celle-ci : « l'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle », l'élégante démonstration de Courcelles ne laisse pas d'être assez artificielle et de faire apparaître ces deux définitions comme assez éloignées l'une de l'autre. Le théorème de Dandelin appliqué au cylindre conduit, il est vrai, à la même conclusion d'une manière assez intuitive. Encore peut-on désirer une démonstration directe et déduite de considérations de Géométrie plane : « l'ellipse est un cercle dont les ordonnées ont été réduites dans un rapport constant ».

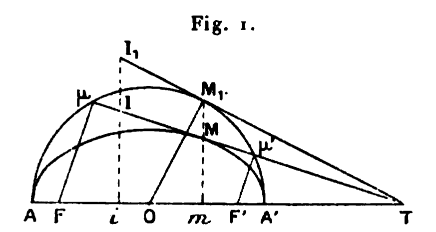
Comme on va le voir, il suffit, pour arriver à ce résultat, de considérer les tangentes à la courbe et non plus les points.

Alors, en effet, on a immédiatement ce théorème :

Si deux tangentes menées, l'une à l'ellipse, l'autre

au cercle principal, se coupent (en T) sur l'axe focal, le rapport des segments iI, iI_1 (*fig.* 1) *qu'elles inter-*

Fig. 1.



ceptent sur une ordonnée quelconque est constant et égal à $\frac{b}{a}$.

Soient, en effet, μ, μ' les projections des foyers F, F' sur la tangente à l'ellipse, c'est-à-dire les intersections de cette tangente avec le cercle principal. On a, par des triangles semblables évidents,

$$\frac{\overline{iI}^2}{\overline{iT}^2} = \frac{\overline{F\mu}.\overline{F'\mu'}}{\overline{T\mu}.\overline{T\mu'}} = \frac{b^2}{\overline{T\mu}.\overline{T\mu'}}.$$

Mais, si M_1 est le point de contact de la tangente au cercle, on a de même

$$\frac{\overline{iI_1}^2}{\overline{iT}^2} = \frac{a^2}{\overline{TM_1}^2},$$

d'où, par division,

$$\frac{\overline{iI}^2}{\overline{iI_1}^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

puisque

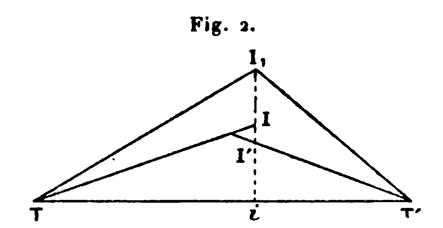
$$T\mu.T\mu' = \overline{TM_1}^2.$$

Si maintenant on considère deux tangentes à l'ellipse et que, par les points T, T' où elles coupent l'axe focal, on mène des tangentes au cercle principal, inclinées sur l'axe respectivement dans le même sens que les tangentes données, *la droite qui joint le point de ren-*

contre des deux tangentes au cercle à celui des tangentes à l'ellipse, est perpendiculaire au grand axe.

Car si, par le point I (*fig.* 2) où se coupent les tan-

Fig. 2.



gentes au cercle, on mène une ordonnée, les segments iI, iI' interceptés sur elle par les tangentes à l'ellipse seront tous deux égaux à $\frac{b}{a} \cdot \overline{iI_1}$; et, comme ils sont de même sens, leurs extrémités coïncident.

Passant à la limite, on voit bien que :

1° *Deux points pris, l'un sur l'ellipse, l'autre sur le cercle et tels que les tangentes en ces points se coupent sur l'axe, ont même abscisse;*

2° *Leurs ordonnées sont dans le rapport constant* $\frac{b}{a}$.

C'est la démonstration demandée.

2. Rien n'empêcherait d'ailleurs de présenter ce même raisonnement si l'on voulait *partir* de la définition de l'ellipse comme figure homographique d'un cercle. Il serait alors acquis que les tangentes aux points correspondants se coupent sur l'axe et ont leurs coefficients angulaires dans le rapport $\frac{b}{a}$; on aurait successivement les conséquences suivantes :

Le produit des perpendiculaires menées à une tangente à l'ellipse par les points μ, μ' *où elle coupe le cercle, et limitées à leurs intersections* F, F' *avec l'axe, est constant et égal à* b^2.

Les points F, F′ *sont symétriques par rapport au centre* O *de la courbe.*

Ils sont fixes (la puissance de chacun d'eux par rapport au cercle étant égale à b^2).

On retomberait donc sur l'ellipse, définie comme podaire négative d'un cercle par rapport à un point intérieur.

La seule question nouvelle à résoudre serait la recherche du point de contact M de la tangente ainsi obtenue. La méthode employée à cet effet dans la théorie des podaires négatives montre immédiatement que la droite $O\mu$ passe par le milieu de MF et que, par conséquent, cette dernière droite est parallèle à $O\mu'$.

Si l'on voulait partir uniquement du fait que le point M est sur la même ordonnée que M_1, la même conclusion [1] ressortirait aisément de triangles semblables déduits de l'égalité

$$TO.Tm = T\mu.T\mu',$$

m étant la projection de M sur l'axe (*fig.* 1).

La conclusion en question entraîne d'ailleurs immédiatement la définition focale ordinaire de l'ellipse.

3. L'hyperbole possède, elle aussi, une propriété manifestement destinée à jouer dans sa théorie le même rôle que les propriétés précédentes dans la théorie de l'ellipse. C'est le théorème si simple :

L'aire du parallélogramme qui a un sommet en un point d'une hyperbole et deux côtés suivant les asymptotes, est constante.

Cette proposition est de celles qui ont leur place mar-

---

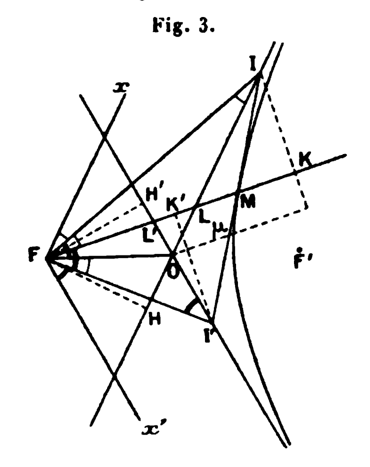
(1) Cette conclusion est immédiate si l'on considère comme connue la théorie des pôles et polaires dans ce cercle.

quée dans tout enseignement géométrique des coniques. Elle n'y a pourtant pas figuré jusqu'ici. La raison en est dans l'absence de démonstration élémentaire. On n'établit habituellement le théorème dont il s'agit que par des calculs de Géométrie analytique plus ou moins déguisés.

On arrive au contraire à une démonstration géométrique simple (qui pourra sans doute être simplifiée encore) en faisant, pour l'hyperbole comme pour l'ellipse, ce qui est fait classiquement pour la parabole, et s'adressant aux tangentes de la courbe.

Il suffit de partir du théorème de Poncelet sur les rayons vecteurs qui vont d'un foyer aux points de contact de deux tangentes et à leur point d'intersection. Ce théorème s'applique aux asymptotes, les rayons vecteurs des points de contact étant remplacés par les parallèles Fx, Fx' (*fig.* 3), menées de F aux direc-

Fig. 3.



tions asymptotiques. Il est alors facile d'établir que :

Le point de contact M *d'une tangente à l'hyperbole divise en deux parties égales le segment* II' *intercepté sur cette tangente par les asymptotes.*

Car si L, L′ sont les points où les asymptotes sont coupées par le rayon vecteur FM, il résulte du théorème cité que les triangles FLI, FL′I′ (*fig.* 3) sont isoscèles. Chacun d'eux a donc ses hauteurs égales et, comme les hauteurs FH, FH′, issues de F, sont égales entre elles, il en est de même des deux autres hauteurs IK, I′K′, ce qui démontre évidemment le théorème.

Ceci prouvé, il suffit d'établir que l'aire du triangle OII′ est constante ou, ce qui revient au même, que le produit OI — OI′ est constant.

Or ce produit est égal à $\overline{OF}^2$, comme le montrent les triangles OFI, OFI′, qui sont semblables comme équiangles.

On peut aussi prouver directement que le triangle OII′ est d'aire constante, en divisant ce triangle en deux triangles partiels par une parallèle Oμ à FM. La somme des deux hauteurs est égale à

$$IK + I'K' = FH + FH' = 2b,$$

et la base commune Oμ est égale à a, le point μ n'étant autre que la projection de F′ sur la tangente.

Là encore on pourrait aisément partir de la nouvelle définition pour retrouver la première.

4. Enfin l'étude des propriétés fondamentales des coniques a son aboutissement dans le théorème suivant :

La perspective d'un cercle est une conique.

Ce n'est pas trop s'avancer que de dire que l'on n'a pas une idée complète de ce que c'est qu'une conique si l'on n'a pas connaissance de ce théorème dans toute sa généralité, c'est-à-dire pour un point de vue et un plan du Tableau *quelconques*.

C'est ce qui a été compris dans le nouveau plan d'études : on y énonce (implicitement) le théorème dont nous parlons, mais à titre de *postulat*.

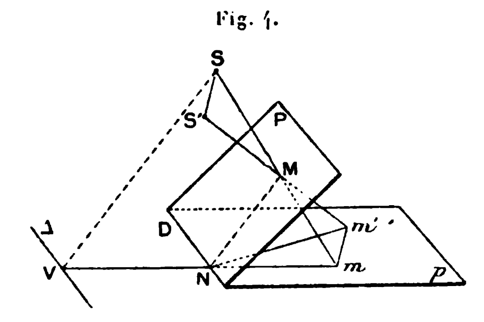
J'avais précédemment essayé, dans mes *Leçons de Géométrie*, d'en donner une démonstration élémentaire. En voici une incomparablement plus simple :

On commence par démontrer que *la projection oblique d'une conique est une conique de même espèce*.

Pour l'hyperbole, c'est une conséquence immédiate de la définition *aréolaire* considérée plus haut. Pour l'ellipse, cela résulte aisément de ce qu'*il existe une ellipse ayant deux demi-diamètres conjugués donnés en grandeur et position* (ellipse qu'on apprend classiquement à construire). On l'obtient enfin pour la parabole, en considérant l'équation de cette courbe rapportée à un diamètre et à une tangente, ou encore en envisageant la parabole comme un cas limite d'ellipse ou d'hyperbole.

Cela posé, soient P le plan d'un cercle dont on fait la perspective, S le point de vue, p le plan du Tableau, qui coupe le premier suivant une droite D (*fig.* 4).

Fig. 4.



Soit S' un point situé sur l'axe du cercle donné. Si S' était le point de vue, le théorème serait démontré, car

le cône qu'il faudrait couper par le plan p serait de révolution.

Supposons, en outre, que la droite SS' ne soit pas parallèle à p.

M étant un point quelconque du cercle, m sa perspective sur p, menons, par m, la parallèle mm' à SS', jusqu'à rencontre en m' avec $S'M$. Le point m' est dans un plan fixe.

Pour l'établir, on mènera par m la perpendiculaire MN sur D, et on la prolongera jusqu'à rencontre en ν avec la parallèle menée par S à MN. On a

$$\frac{mm'}{SS'} = \frac{Mm}{MS} = \frac{Nm}{N\nu}.$$

Or $N\nu$ est constant, car le point ν décrit une droite D parallèle à D (la ligne de fuite).

Donc mm' est proportionnel à Nm, d'où résulte que m' est dans un plan fixe p' passant par D.

Le lieu de m' est la perspective du cercle donné sur p' avec S' comme point de vue, c'est-à-dire une conique.

Or le lieu de m est la projection oblique du lieu de m'. Le théorème est donc démontré.

La démonstration serait en défaut si SS' était parallèle au plan p. Mais il suffirait alors de passer par un point intermédiaire S'', pour lequel cette particularité ne se présenterait pas.

On remarquera que nous avons, du même coup, démontré que *la perspective d'une conique quelconque est une conique*. Il suffit, pour le voir, de prendre pour S' un point d'où l'on voit la conique donnée sous un cône de révolution.

[R4a]

SUR L'ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE;

PAR M. A. TRESSE.

Le nouveau programme de Mécanique de la classe de Mathématiques spéciales place au début de la Statique du corps solide l'étude des six conditions nécessaires d'équilibre, indépendantes des forces intérieures, qui s'appliquent à tout système de points matériels, déformable ou non. Il s'agit ensuite de démontrer que, pour les systèmes invariables, ces conditions sont suffisantes. C'est cette démonstration que nous voulons établir ici par une méthode que nous croyons nouvelle et qui met en évidence un cas d'exception intéressant, sinon curieux, celui des corps solides plans sans épaisseur. Auparavant, nous rappellerons d'une façon sommaire comment on arrive aux conditions nécessaires en renvoyant sur ce point à un article, d'une inspiration très heureuse, de M. Gouilly, dans L'Enseignement mathématique (¹).

1. Soit d'abord *un seul point matériel,* A, soumis à l'action simultanée de plusieurs forces; pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de ces forces concourantes soit nulle, ce qui se traduit, en projetant sur trois axes, par trois conditions nécessaires et suffisantes :

(1) $$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

(¹) A. GOUILLY, *Sur l'enseignement élémentaire de la Mécanique* (*L'Enseignement mathématique,* 1904, n° 1).

2. Soit ensuite un *système quelconque de n points matériels*. Sur ces divers points agissent des forces : les unes, *forces extérieures*, provenant de causes extérieures au système, les autres, *forces intérieures*, provenant des actions mutuelles s'exerçant entre tous ces points deux à deux, et soumises au *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*.

Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun des n points le soit, ce qui se traduit par un système de $3n$ équations de la forme (1), équations que nous appellerons (α), et qui donnent, pour l'équilibre du système, $3n$ *conditions nécessaires et suffisantes*.

Ces équations dépendent des forces intérieures. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction permet d'en déduire *six équations* indépendantes des forces intérieures, lesquelles expriment donc des conditions nécessaires, mais non suffisantes, pour l'équilibre du système. Nous les appellerons (β); on les forme en égalant à zéro la somme algébrique des projections des forces extérieures sur chacun des trois axes de coordonnées, ainsi que la somme algébrique de leurs moments par rapport à chacun des mêmes axes.

Rappelons enfin que ces six équations expriment que les vecteurs représentés par les forces extérieures forment un *système équivalent à zéro*, c'est-à-dire que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle.

3. Ceci posé, considérons un corps solide, ou *système invariable*, ce que nous définirons, au point de vue mécanique, comme un système de points matériels maintenus par les forces intérieures à des distances invariables les uns des autres, ces forces intérieures

pouvant, d'ailleurs, avoir des intensités et des sens quelconques.

Nous voulons démontrer que les équations (β) expriment des conditions suffisantes pour l'équilibre d'un pareil système, ce qui veut dire :

Théorème. — *Les forces extérieures vérifiant les six conditions* (β), *il est possible de leur associer des forces intérieures, soumises au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, de façon que les* $3n$ *équations* (α) *soient aussi vérifiées, c'est-à-dire que chacun des n points du système invariable soit en équilibre.*

Nous désignerons par F_i la force extérieure appliquée au point A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), ou la résultante des forces extérieures appliquées à ce point quand il y en a plusieurs, cette force F_i étant nulle quand il n'y en a aucune, puis par f_{ij} la force de liaison exercée par A_j sur A_i, force dirigée suivant la droite A_iA_j, mais d'intensité et de sens inconnus.

4. *Système de quatre points matériels non situés dans un même plan.* — Considérons d'abord le cas particulier d'un système invariable de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, non situés dans un même plan. De chacun d'eux, A_i, partent trois arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; ces arêtes n'étant pas dans un même plan, on peut regarder la force extérieure F_i comme la résultante de trois autres dirigées suivant ces trois arêtes ; nous désignerons par F_{ij} la composante portée sur l'arête A_iA_j.

En vertu des conditions (β), la somme des moments des forces F_i par rapport à une arête quelconque du tétraèdre est nulle ; il en résulte que les deux forces F_{ij} et F_{ji} placées sur l'arête opposée sont égales et de sens contraires.

Or, vérifier les $3n = 12$ équations (α) revient à trouver des forces intérieures maintenant en équilibre chacun des points A_i. Ceci est possible d'une manière, et d'une seule, car A_i est sollicité par une force extérieure donnée F_i, et par trois forces intérieures données seulement en direction : on prendra pour f_{ij} une force égale et directement opposée à F_{ij}. Mais alors, F_{ij} et F_{ji} étant égales et de sens contraires, il en est de même de f_{ij} et f_{ji}; les équations (α) sont bien vérifiées avec des forces intérieures soumises au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. C. Q. F. D.

5. *Système quelconque de points matériels non situés dans un même plan.* — Pour arriver à la proposition générale, nous pouvons alors la supposer établie dans le cas de $(n-1)$ points quelconques $A_2, \ldots, A_n$, et l'étendre au cas de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, aucun des deux systèmes n'étant dans un même plan.

Parmi les $3n$ équations (α), on satisfera d'abord aux trois équations qui concernent l'équilibre de A_1 en choisissant les $n-1$ forces intérieures $f_{12}, \ldots, f_{1n}$, agissant sur ce point et de directions données, de façon que leur résultante soit égale et directement opposée à la force extérieure F_1. Ceci est toujours possible, les $n-1$ directions données, $A_1A_2, \ldots, A_1A_n$, n'étant pas dans un même plan, et c'est possible d'une infinité de manières, chaque solution dépendant du choix de $n-1-3 = n-4$ arbitraires.

Reste à satisfaire au système (α') des $3(n-1)$ autres équations (α), système où figurent, d'une part, les forces extérieures données $F_2, \ldots, F_n$ et, d'autre part, les forces intérieures $f_{21}, \ldots, f_{n1}$, déterminées par les conditions précédentes. On peut donc considérer toutes ces forces comme des forces extérieures agissant sur le

système invariable de $(n-1)$ points matériels $A_2, \ldots, A_n$. Or, par hypothèse, les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ satisfont aux six équations (β); dans chacune de ces équations, on peut remplacer la projection ou le moment de F_1 par une quantité égale, la somme des projections ou des moments des forces $f_{21}, \ldots, f_{2n}$, cela, en vertu de la façon dont on a choisi les forces opposées $f_{12}, \ldots, f_{1n}$. Les six équations (β), ainsi transformées, expriment alors que l'ensemble des forces extérieures $F_2, \ldots, F_n$, $f_{21}, \ldots, f_{n1}$, appliquées au système invariable de $(n-1)$ points $A_2, \ldots, A_n$, satisfait aux six équations analogues (β'); la proposition étant admise pour un système de $(n-1)$ points, il est donc possible de disposer des forces intérieures restant inconnues de façon que les $3(n-1)$ équations (α') soient vérifiées.

C. Q. F. D.

6. *Degré d'indétermination de la solution.* — Désignons par k_n le nombre d'arbitraires dont on peut disposer dans la détermination des forces intérieures pour un système de n points matériels. Nous avons trouvé, dans ce qui précède,

$$k_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad k_n = n - 4 + k_{n-1}.$$

On en déduit

$$k_n = (n-4) + (n-5) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Ce résultat est d'accord avec le nombre des équations (α) et (β). En effet, les $3n$ équations distinctes (α) donnent six relations (β), indépendantes des forces intérieures, et six seulement, sans quoi celles-ci ne seraient pas suffisantes; les forces intérieures, agissant entre

les n points deux à deux, forment donc $\frac{n(n-1)}{2}$ grandeurs qui, liées par $3n-6$ relations distinctes, dépendent bien d'un nombre d'arbitraires égal à

$$\frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)=\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

7. *Cas d'exception : systèmes plans; systèmes rectilignes.* — Notre raisonnement suppose essentiellement que les points matériels du système invariable ne sont pas dans un même plan, ce qui exige, en particulier, que leur nombre soit au moins égal à *quatre*.

Il reste donc à étudier un système de points matériels tous placés dans un même plan. Or, pour un pareil système, la proposition est manifestement en défaut lorsque les forces extérieures ne sont pas toutes dirigées dans ce même plan, car, si la résultante F_i des forces extérieures appliquées en A_i n'est pas dans le plan du système, les forces intérieures qui agissent sur ce point, et qui doivent toutes être dirigées dans ce plan, ne pourront jamais, quelles que soient leurs intensités, maintenir A_i en équilibre. Il peut d'ailleurs exister des forces extérieures satisfaisant aux conditions (β) et non dirigées dans le plan du système : c'est le cas, par exemple, de quatre forces parallèles, d'intensités égales, deux de même sens, appliquées à deux sommets opposés d'un parallélogramme, les deux autres de sens contraire, appliquées aux deux autres sommets.

Lorsque, au contraire, les forces extérieures sont toutes dirigées dans le plan du système invariable, la proposition est encore exacte, sauf un cas d'exception, celui d'un système de points en ligne droite; on l'établira facilement par une analyse identique à celle que nous venons de développer, débutant par l'étude d'un

système de trois points, pour s'élever de là au cas général.

Reste enfin le cas d'un système invariable de points tous en ligne droite. Ici encore, la proposition tombe en défaut si les forces extérieures ne sont pas toutes dirigées sur cette même droite, mais reste exacte dans le cas contraire.

Observons, en revanche, que dans le cas d'un système formé de trois points seulement, A_1, A_2, A_3, mais non en ligne droite, les équations (β) entraînent comme conséquence que les trois forces F_1, F_2, F_3 sont dans le plan $A_1 A_2 A_3$: il en résulte, en effet, que le moment de F_1, par exemple, par rapport à la droite $A_2 A_3$, est nul. De même, dans le cas de deux points seulement, A_1, A_2, il résulte des équations (β) que les forces F_1, F_2 sont dirigées suivant la droite $A_1 A_2$, la force F_1 ayant un moment nul par rapport à toute droite issue de A_2. Dans ces deux cas simples, la proposition est donc encore exacte.

8. *Sur la résistance des corps solides.* — Les cas d'exception que nous venons de rencontrer montrent avec quelle prudence il faut raisonner, dans la statique des corps solides, lorsqu'on ne tient pas compte des conditions de résistance, c'est-à-dire des limites qui sont physiquement imposées aux intensités des forces intérieures agissant entre les divers points des corps.

Nous pouvons interpréter le cas d'un corps solide plan, sans épaisseur, comme celui d'un corps dont l'équilibre ne pourrait être réalisé qu'avec des forces intérieures infinies, dès qu'il serait soumis à des forces agissant en dehors de son plan, ou encore, comme celui d'un corps dont la fragilité serait infinie.

Par raison de continuité, on peut en conclure qu'il n'est légitime de négliger les déformations d'un système matériel soumis à des forces extérieures d'intensités déterminées, que si ce système a une épaisseur en rapport avec ces intensités.

[K6b]

SUR LA DÉFORMATION DES COORDONNÉES TANGENTIELLES DITES « PARALLÈLES »;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Pour opérer dualistiquement la transformation des nomogrammes à droites entrecroisées en d'autres à points alignés, il suffit, dans les équations qui définissent, en coordonnées cartésiennes, les systèmes cotés figurant sur les premiers, de substituer à ces coordonnées des coordonnées tangentielles. *Théoriquement,* on pourrait faire usage d'un quelconque de ces systèmes (pourvu que l'équation du point et de la droite unis y fût du premier degré) et notamment des coordonnées plückériennes définies par l'équation

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Mais *pratiquement* de telles coordonnées ont le grave inconvénient de ne pas représenter directement des segments comptés sur les axes; elles en sont les inverses, d'ailleurs changés de signe. Cela n'entraîne pas seulement des longueurs dans la construction des graduations (comme, par exemple, lorsqu'il faut, pour une échelle logarithmique, prendre les inverses de tous les logarithmes lus dans la Table, au lieu de porter

directement des segments proportionnels à ces logarithmes, et même, tout simplement, de relever ces segments sur la graduation d'une règle à calcul); cela conduit encore, dans certains cas, fréquents dans la pratique, à des solutions absolument inacceptables; s'il s'agit, par exemple, d'une échelle sinusoïdale, comme on en rencontre constamment dans les applications ressortissant à la trigonométrie sphériqne (calculs nautiques en particulier), on voit que l'emploi des coordonnées plückériennes conduirait à une graduation s'étendant de $+1$ à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$, c'est-à-dire rigoureusement impraticable.

Or, on peut se proposer de déterminer *a priori* un système de coordonnées tangentielles proportionnelles à des segments comptés sur les axes et donnant, pour le point et la droite unis, une équation du premier degré. Voici une façon simple de le faire :

Après avoir fait dépendre linéairement l'équation ponctuelle de la droite de deux paramètres u et v en la mettant sous la forme

$$(au + bv + c)x + (a'u + b'v + c')y + a''u + b''v + c'' = 0,$$

on peut l'écrire

$$(1)\quad (ax + a'y + a'')u + (bx + b'y + b'')v + cx + c'y + c'' = 0.$$

Considérons alors les trois droites

$$(A)\qquad ax + a'y + a'' = 0,$$

$$(B)\qquad bx + b'y + b'' = 0,$$

$$(C)\qquad cx + c'y + c'' = 0.$$

Si, comme on doit le supposer, *leur déterminant n'est pas nul,* elles forment un triangle ABC dont chaque

sommet sera désigné par la lettre correspondant au côté opposé.

Si nous coupons la droite (1) par la droite (B) ou AC, nous avons, pour le point M d'intersection,

$$u = -\frac{cx + c'y + c''}{ax + a'y + a''}.$$

Or, les termes de cette fraction, quand on y fait varier x et y, sont proportionnels respectivement aux distances du point M aux droites (C) et (A), par suite à BM et à MC. On a donc, en représentant par λ une constante,

$$u = \lambda \frac{AM}{MC}.$$

De même, si la droite (1) coupe BC en N,

$$v = \mu \frac{BN}{NC},$$

μ étant une autre constante.

Introduisons une droite fixe $M_0 N_0$ quelconque; nous aurons

$$u = u_0 \frac{AM \,.\, M_0 C}{AM_0 \,.\, MC}, \qquad v = v_0 \frac{BN \,.\, N_0 C}{BN_0 \,.\, NC}.$$

Si nous rejetons maintenant la droite AB à l'infini, les rapports $\frac{AM}{AM_0}$ et $\frac{BN}{BN_0}$ tendant vers l'unité (puisque les segments MM_0 et NN_0 restent finis), nous avons à la limite

$$u = \frac{u_0 \,.\, M_0 C}{MC}, \qquad v = \frac{v_0 \,.\, N_0 C}{NC},$$

et, comme nous sommes libres de choisir $M_0 N_0$ telle que $u_0 \,.\, M_0 C = v_0 \,.\, N_0 C = 1$,

$$u = \frac{-1}{CM}, \qquad v = \frac{-1}{CN}.$$

Ce sont les coordonnées plückériennes.

Pour avoir des coordonnées u et v proportionnelles à des segments comptés sur les axes on voit immédiatement qu'il suffit de rejeter, non pas la droite (C), mais le point C à l'infini. Les axes AC et BC deviennent alors *parallèles* et, en choisissant la droite M_0N_0 telle que $\frac{u_0}{AM_0} + \frac{v_0}{BN_0} = 1$, on a, à la limite,

$$u = AM, \qquad v = BN.$$

Ce sont les *coordonnées parallèles* que nous avons étudiées en détail dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. III, 1884, p. 410) et qui nous ont permis de présenter sous une forme pratique les nomogrammes à points alignés.

[J4f]

SUR LE GROUPE QUI LAISSE INVARIANTE L'AIRE GAUCHE;

PAR M. EDWIN BIDWELL WILSON.

M. Fréchet a récemment appelé l'attention sur une généralisation de la notion d'aire due à MM. Peano et Laisant, et il en a montré les relations avec la notion ordinaire d'aire et avec le calcul fonctionnel ([1]).

J'avais déjà donné une tout autre généralisation en remarquant que l'on pourrait définir l'aire d'une façon quasi-projective et sans faire mention de la longueur des lignes. J'ai fait usage de cette généralisation pour

([1]) *Sur une généralisation des notions d'aire et de plan* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* juin 1904).

établir des théorèmes dans la théorie des groupes projectifs du plan qui laissent l'aire invariante ([1]).

On sait, d'ailleurs, que les transformations du plan qui conservent l'aire ne sont nullement contenues dans le groupe projectif, mais qu'elles forment un groupe infini, à savoir le groupe des mouvements à deux dimensions d'un liquide incompressible, dont l'équation caractéristique est

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad ([2]).$$

Je me propose, dans cette Note, de déterminer le groupe de l'espace qui laisse invariante l'aire gauche de M. Peano. Je ne me bornerai nullement au groupe projectif; je considérerai le groupe le plus général dont les transformations puissent se synthétiser de transformations infiniment petites. Nous trouverons à la fin que le groupe cherché n'est autre que celui des mouvements rigides, c'est-à-dire des déplacements euclidiens. Voilà un résultat qui pourrait sembler assez surprenant vu la grande généralité du groupe plan qui laisse invariante l'aire au sens ordinaire. Bien que ce problème soit simple et qu'il ait dû être résolu auparavant, je n'en puis trouver aucune mention. Toutefois, la méthode que je vais suivre pourrait avoir quelque intérêt et plus ou moins de nouveauté.

1. Remarquons d'abord que, puisque l'aire gauche

([1]) *Ueber eine von dem Begriff der Länge unabhängige Definition des Volumens* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1903, p. 555-561), et *A generalised conception of area : applications to collineations in the plane* (*Annals of Mathematics*, 1903, p. 19-45).

([2]) *Voir*, par exemple, Sophus Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, 1891, p. 82-85.

jouit des propriétés I'-IV' (1), il suffit de se borner aux aires infiniment petites, c'est-à-dire aux aires planes infinitésimales (avec lesquelles on peut ensuite construire les aires gauches finies par un procédé de sommation). Puis, ce n'est pas l'aire vectorielle **S** qu'il faudrait conserver, mais sa valeur scalaire $\sqrt{\mathbf{S}.\mathbf{S}}$. Si l'on voulait conserver la direction de **S**, on se limiterait forcément aux translations, de même que si l'on eût voulu conserver la longueur et la direction des lignes.

Quant aux calculs mêmes qui entrent dans la solution du problème, ils sont assez longs, et il y aura grand avantage à les abréger par l'introduction de l'analyse vectorielle. Je suivrai les notations de Gibbs, dont M. Genty a si heureusement fait usage dans un Mémoire sur les systèmes triples orthogonaux publié il y a peu de temps dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. Pour les détails du calcul vectoriel, je renverrai le lecteur au Traité (2). (Je citerai les pages de ce Traité.)

Soit Uf une transformation infinitésimale du groupe dont il est question :

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Introduisons le vecteur

$$\mathbf{L} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k};$$

d'où

$$Uf = \mathbf{L}.\nabla f.$$

Soient $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ les vecteurs de deux points de l'espace, soient $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}'_1$ leurs transformés par Uf. De la défini-

(1) *Voir* FRÉCHET, *loc. cit.*
(2) *Voir* GIBBS-WILSON, *Vector Analysis* (New-York, 1901).

tion même du symbole $\mathrm{U}f$, on tire

$$(1)\qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{L}\,\delta t + \ldots,$$
$$(2)\qquad \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' + \mathbf{L}'\,\delta t + \ldots.$$

Supposons que $\mathbf{r}'$ soit de la forme $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, développons $\mathbf{L}'$ suivant les puissances de $d\mathbf{r}$ en nous rappelant que (p. 404)

$$d\mathbf{L} = d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}.$$

Alors (2) devient

$$(2')\qquad \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{L}\,\delta t + d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}\,\delta t,$$

en écartant les termes d'ordre supérieur en δt et en $d\mathbf{r}$. Retranchons (1) de (2'), d'où il s'ensuit que

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} + d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}\,\delta t = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t).$$

Cette expression nous donne la relation entre l'élément linéaire $d\mathbf{r}$ et son transformé $d\mathbf{r}_1$. Le polynome dyadique

$$\Phi = \mathrm{I} + \nabla\mathbf{L},$$

où I représente l'idemfacteur (p. 288), est celui qui transforme les éléments linéaires. Gibbs a donné une théorie de la multiplication double qui est particulièrement utile pour la discussion des transformations d'aire et de volume (p. 306-315 et 333-334). Le point principal est que l'on peut opérer algébriquement sur des dyadiques presque comme s'ils étaient des nombres.

Soient, en effet, $d\mathbf{S}$ et $d\mathbf{S}_1$ l'élément d'aire et son transformé, $d\tau$ et $d\tau_1$ ceux du volume. Si l'on a

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.\Phi,$$

on a également (*loc. cit.*)

$$d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.\Phi_2,\qquad \Phi_2 = \tfrac{1}{2}\,\Phi \overset{\times}{\times} \Phi,$$
$$d\tau_1 = d\tau\,\Phi_3,\qquad \Phi_3 = \tfrac{1}{3}\,\Phi_2 : \Phi.$$

2. Appliquons maintenant cette théorie au cas actuel (p. 295) :

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t) = (\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}_C\,\delta t).d\mathbf{r};$$

d'où vient

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t).(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}_C\,\delta t).d\mathbf{r}.$$

Développons en négligeant les carrés de δt :

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.\mathrm{I}.d\mathbf{r} + d\mathbf{r}.(\nabla\mathrm{L} + \nabla\mathrm{L}_C).d\mathbf{r}\,\delta t.$$

La condition, pour que la longueur se conserve, est évidemment

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.d\mathbf{r};$$

d'où

$$d\mathbf{r}.(\nabla\mathrm{L} + \nabla\mathrm{L}_C).d\mathbf{r} = 0,$$

et cela pour tous les vecteurs $d\mathbf{r}$, ce qui entraîne la nullité identique du dyadique (p. 284-286). Ainsi nous avons

$$\nabla\mathrm{L} + \nabla\mathrm{L}_C = 0.$$

D'autre part, on a, pour régir les transformations d'aires,

$$d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t)_2 = (\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t)_{2C}.d\mathbf{S};$$

d'où

$$d\mathbf{S}_1.d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t)_2.(\mathrm{I} + \nabla\mathrm{L}\,\delta t)_{2C}.d\mathbf{S}.$$

Rappelons la formule (p. 331)

$$(\Phi + \Psi)_2 = \Phi_2 + \Phi \between \Psi + \Psi_2$$

et (p. 313)

$$\mathrm{I}_2 = \mathrm{I};$$

développons toujours en écartant les puissances supérieures de δt, et nous aurons

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_1.d\mathbf{S}_1 &= d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \mathrm{I} \between \nabla\mathrm{L}\,\delta t).(\mathrm{I} + \mathrm{I} \between \nabla\mathrm{L}_C\,\delta t).d\mathbf{S} \\ &= d\mathbf{S}.\mathrm{I}.d\mathbf{S} + d\mathbf{S}.\mathrm{I} \between (\nabla\mathrm{L} + \nabla\mathrm{L}_C).d\mathbf{S}\,\delta t. \end{aligned}$$

Si, maintenant, l'aire ne doit pas changer de valeur,

$$d\mathbf{S}_1 . d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S} . d\mathbf{S}$$

et

$$d\mathbf{S} . \mathrm{I} \mathbin{\times\!\!\!\!\times} (\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C) . d\mathbf{S} = 0.$$

Cette équation a lieu pour n'importe quelles valeurs du vecteur $d\mathbf{S}$. Ainsi

$$\mathrm{I} \mathbin{\times\!\!\!\!\times} (\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C) = 0;$$

d'où, en divisant par le dyadique non nul I,

$$\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C = 0.$$

On voit qu'on retombe sur la même condition qu'auparavant. Le théorème que le groupe qui laisse invariante l'aire au sens de M. Peano n'est autre que celui qui laisse invariantes les longueurs des lignes, soit le groupe de déplacements euclidiens, se trouve donc démontré.

Si l'on voulait trouver la condition pour que le volume ne change pas, il n'y aurait qu'à écrire

$$\mathrm{I} = (\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_3 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_2 : \nabla\mathbf{L}\,\delta t;$$

d'où, en remarquant que $\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}$,

$$\mathrm{I} : \nabla\mathbf{L} = \nabla\mathbf{L}_S = \nabla . \mathbf{L} = 0.$$

Cette condition est bien connue. Elle exprime tout simplement le fait que la divergence de **L** doit être nulle.

3. Exprimons la condition $\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C = 0$ sous une forme plus familière :

$$\begin{aligned}\nabla = \;& \mathbf{ii}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \mathbf{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathbf{ik}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \\ &+ \mathbf{ij}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \mathbf{jj}\frac{\partial\eta}{} + \mathbf{jk}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \\ &+ \mathbf{ki}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \mathbf{kj}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \mathbf{kk}\frac{\partial\zeta}{\partial z}.\end{aligned}$$

L'équation $\nabla L + \nabla L_C = 0$ nous montre que le déterminant des neuf dérivées partielles est un déterminant gauche. C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0.$$

Ces six expressions qui sont identiquement nulles sont précisément les six fonctions caractéristiques bien connues de la déformation homogène osculatrice à la transformation Uf. Dans ces conditions, M. Appell a montré que la transformation n'est autre qu'un déplacement ([1]).

Ainsi notre problème a été complètement résolu et mis en harmonie avec la théorie de l'élasticité.

On pourrait demander la généralisation aux dimensions supérieures, laquelle est fort simple. A quatre dimensions on aura, par exemple, l'aire plane, l'aire gauche et l'aire doublement gauche, pour ainsi dire. On aura aussi le volume ordinaire à trois dimensions et le volume gauche; puis le volume à quatre dimensions. Et ainsi de suite pour des espaces à dimensions plus élevées. L'analyse qui sert à résoudre le problème est la même que pour trois dimensions.

Le théorème fondamental est celui-ci :

Dans l'espace à n dimensions, le groupe qui laisse invariants ou la longueur, ou l'aire (généralisée), ou le volume (généralisé) de trois jusqu'à n — 1 *dimen-*

([1]) *Voir* son *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 265-266, où les six équations aux dérivées partielles sont intégrées par voie directe.

sions est toujours le groupe des déplacements euclidiens.

Les conditions analytiques sont

$$\nabla L + \nabla L_C = 0$$

ou

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

si Uf s'écrit

$$Uf = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Au contraire, le groupe qui laisse invariant le volume à n dimensions est infini et régi par l'équation

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_n} = 0.$$

[S1a]

RÉSISTANCE DE L'ELLIPSOÏDE IMMERGÉ DANS UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE. INTÉGRATION DES FORMULES. EXPRESSION DES VALEURS APPROCHÉES. CAS DU DISQUE PLAT ET DE L'AIGUILLE;

PAR M. MATHY.

On sait que la résistance d'un corps immergé dans un fluide parfait incompressible est le produit de trois facteurs : le premier dépend de la forme du corps; le deuxième est la masse du fluide ayant un volume égal à celui du corps; le troisième est la différence d'accélération du fluide et du corps.

La détermination du premier facteur donne lieu à de

sérieuses difficultés; sa valeur pour l'ellipsoïde n'est exprimée dans les auteurs que sous forme d'intégrale; je me propose de rechercher cette expression à l'aide des fonctions elliptiques et de montrer que, dans le cas où les limites d'intégration ne sont pas des demi-périodes, les valeurs approchées sont encore applicables à la pratique de la même façon que les fonctions circulaires.

Soient a, b, c les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde, $a > b > c$; le premier facteur $\mathbf{a}_1$ de sa résistance suivant l'axe des x est

$$(1)\quad \mathbf{a}_1 = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}}{\displaystyle\frac{2}{abc} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}}.$$

Les valeurs des deux autres coefficients $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_1$ se déduisent de (1) par la permutation des lettres a et b ou a et c.

La question est ramenée à trouver la valeur de

$$(2)\quad X = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

A cet effet, on pose

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = z - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2), \\ e_1 = \frac{1}{3}(a^2+b^2-2c^2), \\ e_2 = \frac{1}{3}(a^2+c^2-2b^2), \\ e_3 = \frac{1}{3}(b^2+c^2-2a^2). \end{cases}$$

L'expression (2) peut alors s'écrire

$$(4)\quad X = \int_{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}^\infty \frac{dz}{(z-e_3)\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}.$$

Or, si $z = pv$, les limites d'intégration seront $pv = \infty$ et

$$pv = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{5}$$

De ce que

$$p'v = -2\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}$$

on a

$$X = \int \frac{-2\,dv}{pv - e_3}. \tag{6}$$

Mais on sait que

$$p(v + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pv - e_3};$$

il en résulte que

$$X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \int [e_3 - p(v + \omega_3)]\,dv. \tag{7}$$

Par intégration

$$X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [e_3 v + \zeta(v + \omega_3)]_{pv = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}^{pv = \infty}.$$

Mais $pv = \infty$ fournit $v = 0$, d'où

$$X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\eta_3 - e_3 v - \zeta(v + \omega_3)]_{pv = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}. \tag{8}$$

On développe $\zeta(v + \omega_3)$ et l'on remplace les différences $e_3 - e_2$, $e_3 - e_1$ par leurs valeurs déduites de (3), et l'on obtient

$$X = \frac{-2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left(e_3 v + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_3} \right). \tag{9}$$

On aurait de même

$$Y = \frac{-2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left(e_2 v + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_2} \right),$$

$$Z = \frac{-2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left(e_1 v + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_1} \right).$$

L'argument v est déterminé par $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. On remarque qu'il est réel et compris entre o et ω; car :

1° Le module $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} < 1$;

2° $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ est plus grand que e_1 ou $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 - c^2)$.

D'un autre côté, on obtient les trois fractions $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_3}$, $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_2}$, $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1}$ à l'aide de (3) et (5); elles sont égales à $-\frac{bc}{a}$, $\frac{-ca}{b}$, $\frac{-ab}{c}$.

En remplaçant dans (1) X par sa valeur (9), on trouve $\mathbf{a}_1$; on détermine de même $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{c}_1$ à l'aide de Y et Z.

Expression des valeurs approchées. — Au lieu de $\zeta(v)$, on prend son terme principal $\frac{1}{v}$ et l'on a

$$(9') \qquad X = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\left(\frac{bc}{a} - e_3 v - \frac{1}{v}\right).$$

Il reste à calculer v; on sait qu'il faut tenir compte du signe de e_2 ou de $a^2 + c^2 - 2b^2$.

Premier cas : $e^2 < 0$. — La demi-période K se calcule à l'aide des Tables de Legendre; on sait que

$$k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

On remarque que

$$k'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Dès lors, on obtient v par la forme circulaire

$$\cos\frac{\pi}{K}\sqrt{a^2 - c^2}\,.\,v = \frac{s}{q},$$

avec

$$q = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1}{2} \frac{1 - k'^{\frac{1}{2}}}{1 + k'^{\frac{1}{2}}},$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu_1 - e_3}} = \frac{1}{2} \frac{b - ak'^{\frac{1}{2}}}{b + ak'^{\frac{1}{2}}}.$$

D'où

$$(10) \qquad v = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc.cos} \frac{\left(b - ak'^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + k'^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(b + ak'^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - k'^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Second cas : $e_2 > 0$. — Les formules précédentes s'appliquent avec changement de e_1, e_2, e_3, p, K, cos en $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$, $-p$, K′, cos hyp. Or K′ se calcule encore par les Tables de Legendre; à l'aide de

$$k'^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

On en déduit

$$(11) \qquad v = \frac{K'}{\pi\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc.cos\,hyp.} \frac{\left(b - ck^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + k^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(b + ck^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - k^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Les formules (9′), (10) et (11) fournissent donc le moyen de calculer X; pour obtenir Y et Z, il faut considérer

$$\left(\frac{ac}{b} - e_2 v - \frac{1}{v}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ab}{c} - e_1 v - \frac{1}{v}\right),$$

v a la précédente valeur (10) ou (11).

Ellipsoïde de révolution aplati. Disque circulaire plat. — Lorsque $a = b$, $k^2 = 0$ et les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions circulaires. X et Y prennent la forme $\frac{0}{0}$ et il faut leur appliquer la règle

élémentaire de la dérivation. Quant à Z_1 les formules de dégénérescence conduisent successivement à

$$(12)\quad \begin{cases} Z = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^2}\left(\dfrac{a^2}{c} - \dfrac{3e_1}{2}v - c\right) \\ = \dfrac{2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \text{arc sin}\,\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right). \end{cases}$$

Pour le disque circulaire plat, c étant très petit par rapport à a, $a^2 - c^2$ tend vers a^2; d'où

$$(13)\qquad Z = \frac{2}{a^3}\left(\frac{a}{c} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Dès lors

$$(14)\qquad c_1 = \frac{\dfrac{2}{a^3}\left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{2}{a^2 c} - \dfrac{2}{a^2 c} + \dfrac{\pi}{a^3}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{c} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Le rapport $\frac{a}{c}$ est très grand; mais le second facteur de la résistance devient très petit, puisque c'est la masse du fluide ayant le volume du disque; on prend le rapport du produit de ces deux facteurs au produit des deux facteurs relatifs à la sphère de même rayon que le disque; le premier facteur est $\frac{1}{2}$, on a ainsi

$$(15)\qquad \frac{R_z \text{ du disque } a}{R_z \text{ de la sphère } a} = \frac{\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{4}{3}\pi a^2 c}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{4}{3}\pi a^3} = \frac{4}{\pi}\,\frac{a - c\dfrac{\pi}{2}}{a}.$$

Ce rapport tend vers $\frac{4}{\pi}$ avec c tendant vers o. D'où, si $R_x = R_y = 0$, c'est-à-dire si le disque se meut perpendiculairement à son plan, sa résistance se réduit à (15).

Ellipsoïde de révolution allongé. Double aiguille. — Dans ce cas, $b^2 = c^2$, $k^2 = 1$ et il y a dégénérescence

des fonctions elliptiques en fonctions hyperboliques. Y et Z prennent la forme $\frac{0}{0}$.

Quant à X, on a

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{2}{(a^2-c^2)^2}\left(\frac{c^2}{a} - \frac{3e_3}{2}\wp - a\right)\\ &= \frac{2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\log\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right). \end{aligned}\right.$$

Pour la double aiguille, c est très petit, a^2-c^2 tend vers a^2, d'où

$$(17)\qquad X = \frac{2}{a^3}\left(\log\frac{2a}{c} - 1\right)$$

et

$$(18)\qquad \mathbf{a}_1 = \frac{\frac{2}{a^3}\log\frac{2a}{c} - \frac{2}{a^3}}{\frac{2}{ac^2} + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3}\log\frac{2a}{c}} + \frac{\log\frac{2a}{c} - 1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\log\frac{2a}{c} - 1\right)},$$

$\mathbf{a}_1$ tend vers 0 avec c; comme le volume est très petit, on peut dire que $R_x = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DU TROISIÈME ORDRE; par M. *F. Dumont*, professeur au lycée d'Annecy. — 1 vol. in-8° de IX-313 pages. Annecy, J. Depollier; 1904.

Dans sa Préface, M. Dumont nous annonce que son Ouvrage est une œuvre d'étudiant; il serait à souhaiter que nous ayons dans nos écoles de France beaucoup d'*étudiants* de ce genre, rompus aux méthodes pédagogiques et sachant exposer une question aussi clairement!

Depuis Chasles, la Géométrie pure sommeille un peu en France. Les belles leçons de M. Darboux ont orienté toute une jeune école vers la Géométrie infinitésimale et cinématique. Les travaux de Lie et les progrès admirables de la Théorie des fonctions ont attiré les autres vers des spéculations analytiques d'un caractère élevé. Mais la Géométrie pure, celle qui ne puise ses sources que dans les éléments d'Euclide et l'Algèbre, perd du terrain.

C'est un peu pour faire revivre la tradition mourante, un peu pour fournir aux jeunes étudiants un sujet attrayant pour leurs méditations, et aussi pour placer en lumière quelques travaux personnels fort intéressants, que M. Dumont a entrepris de faire, en un Ouvrage didactique, l'exposé systématique des propriétés fondamentales des cubiques planes et des surfaces du troisième ordre.

La lecture du premier Chapitre, qui contient l'étude des *ternes* de points sur une droite et des involutions cubiques, porterait d'abord à croire que l'auteur va, à l'instar de Clebsch, Cayley et d'autres, se placer sur le terrain des formes algébriques et faire cette sorte de Géométrie algébrique qui n'est qu'une adaptation du langage géométrique à l'énoncé de faits de calcul.

Mais, aussitôt après avoir donné succinctement, de cette théorie, ce dont il avait besoin pour la suite, M. Dumont abandonne le calcul pour ne faire que de la Géométrie *réelle*, celle qui traite des formes et des propriétés *graphiques* des figures qu'elle envisage. A ce point de vue, le Chapitre IV est caractéristique et sa lecture seule suffit pour préciser les intentions et les vues de l'auteur.

La classification des cubiques peut, en effet, se faire de deux façons distinctes. L'une, purement algébrique, qui, n'ayant pas égard à la forme graphique de la courbe, n'envisage que son équation et groupe ensemble toutes les courbes dont les équations se ramènent projectivement au même type canonique. Dans une telle classification, les invariants de la forme cubique jouent évidemment le rôle fondamental. L'autre, et c'est celle qu'adopte M. Dumont, consiste à grouper ensemble les courbes qui ont la même forme graphique. Dans ce cas, les invariants ne jouent plus qu'un rôle secondaire, puisque, pour deux courbes de formes très voisines, l'invariant du rapport anharmonique de quatre tan-

gentes issues d'un point peut avoir des valeurs différentes tandis qu'il peut ne pas différer pour deux cubiques graphiquement fort distinctes.

Placé sur ce terrain bien net, l'auteur étudie successivement, dans deux Parties conçues sur le même plan, les cubiques planes et les surfaces cubiques. Ce parallélisme voulu entre la Géométrie plane et celle de l'espace permet ainsi de mettre à la fois en évidence les analogies et les dissemblances.

Propriétés générales, modes de génération, pôles et polaires, singularités ponctuelles et tangentielles, intersections, etc. sont méthodiquement étudiés avec soin.

Visiblement, M. Dumont a toujours recherché la méthode la plus *simple*, la plus intuitive, celle qui exige le moins de connaissances préalables. Et, comme son Livre est une œuvre d'étudiant *pour des étudiants*, il a placé à la fin de chaque Chapitre une série d'énoncés de questions fort bien choisies et propres à exercer la sagacité des lecteurs. Ainsi il nous a donné un Ouvrage qui pourra être lu sans peine par un élève de Mathématiques Spéciales. C'est, par essence, le type des livres à donner en prix aux élèves sortant des classes de Mathématiques Spéciales qui, pendant leurs loisirs, en attendant l'entrée dans une École, liront avec intérêt et aisance cet Ouvrage instructif qui leur ouvrira des horizons nouveaux.

CARLO BOURLET.

THÉORIE DES NOMBRES IRRATIONNELS, DES LIMITES ET DE LA CONTINUITÉ; par M. *René Baire*, maître de Conférences à l'Université de Montpellier. — 1 broch. in-8° de 61 pages. Paris, Vuibert et Nony; 1905.

M. René Baire est un jeune mathématicien de talent qui a coutume d'attaquer et de résoudre avec succès des problèmes subtils et profonds de la Théorie des fonctions. A la fois philosophe et mathématicien, il se meut à l'aise dans un monde terriblement abstrait, où quelque cerveau moins bien trempé succomberait à la tâche.

Sa brochure sur la Théorie des nombres irrationnels et la continuité n'est probablement que l'exposé tardif d'idées qu'il a dû mûrir depuis longtemps; et il eût été vraiment fâcheux,

pour notre enseignement, qu'il ne nous les eût point fait connaître.

Sa méthode n'est pas essentiellement originale, car elle procède de celle de Dedekind, retrouvée et magistralement exposée par M. J. Tannery dans son *Introduction à la Théorie des fonctions;* mais ce qui la caractérise et la recommande à l'attention de tous les professeurs c'est sa simplicité, sa concision jointes à sa généralité.

Comme de coutume, M. Baire définit un nombre irrationnel par une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels; puis, de suite, par un ingénieux emploi des *bornes* supérieure et inférieure d'un ensemble, il définit la limite d'une suite, établit le théorème fondamental de Cauchy et donne la notion des valeurs approchées d'un nombre irrationnel, et cela sans avoir eu besoin de définir les opérations sur les nombres irrationnels.

Contrairement à toutes nos habitudes, il commence par définir la *différence* de deux nombres irrationnels. C'est là la *seule* opération qu'il définit directement, isolément.

Ceci fait, il donne immédiatement la notion de *fonctions d'arguments irrationnels* et celle de leur continuité.

Le *principe d'extension* d'une fonction, définie dans un champ pour les valeurs rationnelles de la variable, aux valeurs irrationnelles, fournit, du même coup, et comme cas particuliers d'un cas plus étendu, les définitions de toutes les opérations sur les nombres irrationnels ainsi que leurs propriétés.

C. B.

CORRESPONDANCE.

M. **Camille Massing**. — Le théorème bien connu de *Steiner,* à savoir que *le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice,* peut être complété de la façon suivante :

Si les normales aux trois points de tangence concourent en un même point M, *le point de concours des hauteurs*

est le point de rencontre de la directrice et du diamètre de la parabole qui passe par ce point M.

En effet, soient N, N', N" les trois sommets du triangle normal circonscrit correspondant au point M; α et β les coordonnées du sommet N. On voit facilement que l'ordonnée du point de contact du côté N'N" est -2β. L'équation de ce côté est alors

$$px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0.$$

Les coordonnées du sommet N' seront

$$x' = \frac{\beta}{p}\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}\right),$$

$$y' = -\frac{1}{2}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}\right);$$

l'équation du côté opposé NN" sera

$$\left(\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha} - \beta\right)x + 2\alpha y - \alpha\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}\right) = 0.$$

Ceci posé, il suffit d'écrire les équations des perpendiculaires abaissées des sommets N et N' sur les côtés opposés et de faire dans ces équations $x = -\frac{p}{2}$. On trouve

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p} = y_1,$$

car y_1 (ordonnée du point M) est, en vertu des formules de Desboves, égal à $-\frac{2\alpha\beta}{p}$.

Cette démonstration est *indépendante* de celle du théorème de Steiner.

Si l'on admettait le théorème de Steiner comme démontré, la démonstration se ferait en quelques lignes comme il suit :

L'équation de la perpendiculaire abaissée du sommet $N(\alpha, \beta)$ du triangle normal circonscrit correspondant au point $M(x_1, y_1)$ sur le côté opposé à N (représenté lui-même par l'équation $px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0$) est

$$(1) \qquad \frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{2\beta}.$$

Le diamètre (de la parabole) passant par le point $M(x_1, y_1)$ est représenté par l'équation

$$(2) \qquad y + \frac{2\alpha\beta}{p} = 0$$

(en vertu des formules de Salmon-Desboves).

Éliminant y entre (1) et (2), on voit que l'abscisse du point de rencontre de ce diamètre (2) et de la hauteur représentée par l'équation (1) est

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Donc, le diamètre (de la parabole) qui passe par le point $M(x_1, y_1)$ (point d'émission des trois sommets) passe par le point de rencontre d'une des hauteurs et de la directrice et par conséquent par le point de rencontre des trois hauteurs.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Les deux nombres* ω *et* ω' *ont un rapport imaginaire. Pour quelles valeurs du nombre entier* p *la série*

$$\sum\sum \frac{1}{(m\omega + n\omega')^p}$$

sera-t-elle absolument convergente?

La sommation $\sum\sum$ *s'étend à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles des nombres* m *et* n, *excepté* $m = n = 0$.

Définir les fonctions pu, ζu, σu.

II. *On donne en coordonnées cartésiennes rectangulaires planes de cercle*

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2$$

et la parabole

(2) $$x^2 = 2py.$$

Par un point quelconque M *du plan on mène une tangente* MP *au cercle* (1), P *désignant le point de contact. Le rayon du cercle qui passe par* P *rencontre en* Q *la parabole* (2).

Déterminer une courbe Γ *telle que la normale en tout point* M *de cette courbe passe par le point* Q.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Appliquer le théorème des résidus au calcul de l'intégrale*

$$\int_C (a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz$$

prise le long d'un cercle C *de rayon*

$$R > 1 \quad et \quad < 2 \qquad (1 < R < 2),$$

a_0, a_1, a_2, a_3 *désignant quatre constantes.*

II. *On pose*

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)(3x^2 + x + 1)}}.$$

Calculer x *en fonction de* u, *en employant les fonctions* sn, cn. (Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$$

et l'on demande :

1° *La valeur de cette intégrale prise le long d'un cercle de rayon très grand ayant l'origine pour centre ;*

2° *La valeur de l'intégrale prise le long de cercles infiniment petits entourant les points* $z = 0$, $z = 1$;

3° *La valeur de l'intégrale réelle*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

3° *D'étudier les différentes valeurs de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$$

lorsque le chemin d'intégration allant de z_0 à z_1 varie de toutes les façons possibles.

II. *Trouver, dans un plan, une courbe* C *telle que la distance de l'origine des coordonnées à la tangente en un point* M *de la courbe* C *soit proportionnelle à l'abscisse de ce point.*

Épreuve pratique. — *On sait que l'égalité*

$$(1) \qquad u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$$

définit z comme fonction uniforme et méromorphe de u. Soit

$$z = f(u).$$

Au voisinage de la valeur $u = 0$, le développement de $f(u)$ est de la forme suivante :

$$f(u) = \frac{A}{u} + B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + \ldots .$$

On demande de calculer les coefficients A, B_0, B_1, B_2, ... *jusqu'à* B_8 *inclusivement.*

On supposera que dans l'intégrale (1) *la détermination initiale du radical pour $z = \infty$ est telle que le rapport*

$$\frac{\sqrt{z^4+1}}{z^2} = 1$$

pour z infini.

Nota. — *En faisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, on cherchera d'abord le développement de $A = \frac{1}{f(u)}$ en série de Mac Laurin; soit*

$$A = + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots .$$

et l'on cherchera ensuite le développement de

$$\frac{1}{\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \ldots}.$$

(Novembre 1904.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane telle que le rayon de courbure soit égal à quatre fois la longueur de la portion de normale limitée à l'axe* OX.

On étudiera séparément deux cas, suivant le sens du rayon de courbure par rapport à cette portion de normale.

Dans chaque cas :

1° *Étudier la forme de la courbe et former ses équations au moyen d'un paramètre variable;*

2° *Calculer la longueur d'un arc de courbe;*

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe* Ox, *l'axe* Oy *convenablement choisi, et une normale quelconque;*

4° *Chercher la relation qui existe entre le rayon de courbure et l'ordonnée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne (en coordonnées rectangulaires) l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2 = 0$$

et le paraboloïde

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x}{a} = 0.$$

Trouver le volume du solide commun.

(Novembre 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire les courbes qui, rapportées à deux axes de coordonnées* Ox, Oy, *vérifient l'équation différentielle*

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^{2y} = 0.$$

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par le cercle défini par les équations*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - y = 0;$$

3° *Déterminer les lignes de courbure de cette surface* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{(x^2+a^2)^2}\cos x\, dx,$$

dans laquelle a désigne un nombre donné.

(Novembre 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une courbe* S, *tracée sur un cône de révolution, rencontre les génératrices de ce cône sous un angle constant. Trouver le lieu* S_1 *des centres de courbure de* S.

On démontrera :

1° *Que les tangentes aux courbes* S *et* S_1 *aux points correspondants sont rectangulaires;*

2° *Que la courbe* S_1 *est située sur un cône de révolution dont elle coupe les génératrices sous un angle constant.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver l'équation générale des surfaces qui sont telles que le plan tangent en l'un quelconque* M *de ses points détermine sur* Oz, *à partir de l'origine* O, *un segment qui soit dans un rapport constant avec la distance du point* M *à l'origine.*

Déterminer une surface intégrale particulière qui passe par une hélice circulaire donnée ayant Oz *pour axe.*

(Novembre 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1953.

(1903, p. 46.)

Soient, pour un point M *d'une courbe* (M) *quelconque,* m *et* μ *les centres des deux premières courbures.* MT *étant la tangente en* M *à cette courbe,* Δ *une direction fixe quelconque, on porte des longueurs égales au rayon de courbure* mM *en* mM$_1$ *et* MM$_2$ *sur les parallèles à* Δ *menées par* m *et* M, *en* MM$_3$ *sur la tangente* MT.

Les tangentes en M_1, M_2, M_3 *aux courbes décrites respectivement par ces trois points résultent des théorèmes suivants :*

I. *La tangente en* M_1 *passe par* M.

II. *La tangente en* M_2 *passe par le point de rencontre de la tangente* MT *et de la perpendiculaire abaissée de* m *sur* Mμ.

III. *La tangente en* M_3 *est symétrique de* $M_3\mu$ *par rapport à la tangente* MM$_3$. (M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

1. Appelons T_1 le point inconnu où la tangente en M_1 à la courbe que décrit ce point rencontre mM.

Puisque la direction de mM$_1$ est fixe, si $d(m)$ est la différentielle de l'arc décrit par le point m, on a

$$\frac{d.mM_1}{d(m)} = \frac{mM_1}{mT_1}.$$

Mais, par hypothèse,

$$d.mM_1 = d.mM,$$

et, d'après un théorème bien connu,

$$d.mM = d(m).$$

Donc

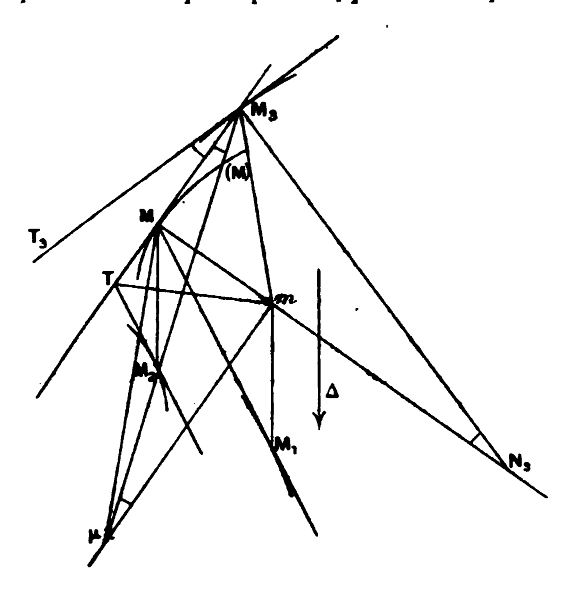
$$m\mathrm{M}_1 = m\mathrm{T}_1,$$

ou, en tenant compte de l'hypothèse $m\mathrm{M}_1 = m\mathrm{M}$,

$$m\mathrm{M} = m\mathrm{T}_1,$$

ce qui montre que le point T_1 coïncide avec le point M.

On peut donc dire que le point M_1 *poursuit* le point M.



II. De même, si la tangente en M_2 coupe la tangente en M au point T, on a, puisque MM_2 est de direction fixe,

$$\frac{d.\mathrm{MM}_2}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{MM}_2}{\mathrm{MT}},$$

ou, en vertu de l'hypothèse $\mathrm{MM}_2 = \mathrm{M}m$,

$$\frac{d.\mathrm{M}m}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MT}}.$$

Mais, si $d\theta$ est l'angle de contingence en M, on a

$$d.\mathrm{M}m = m\mu.d\theta,$$
$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}m.d\theta.$$

Donc

$$\frac{d.\mathrm{M}m}{d(\mathrm{M})} = \frac{m\mu}{\mathrm{M}m}$$

et

$$\frac{m\mu}{\mathrm{M}m} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MT}}.$$

Cela montre que les triangles rectangles $m\mathrm{M}\mu$ et TM_1m sont semblables et, puisque leurs côtés de l'angle droit sont deux à deux perpendiculaires, il en est de même de leurs hypoténuses $\mathrm{M}\mu$ et $m\mathrm{T}$.

III. Si la normale en M_3 à la courbe (M_3) coupe en N_3 la normale en M à la courbe (M) dont l'angle de contingence est $d\theta$, on a

$$d.\mathrm{MM}_3 = m\mathrm{N}_3.d\theta.$$

Mais

$$d.\mathrm{M}m = m\mu.d\theta.$$

Donc

$$m\mathrm{N}_3 = m\mu.$$

Or l'égalité de MM_3 et de $\mathrm{M}m$ entraîne l'égalité des angles que M_3m fait avec MM_3 et $\mathrm{M}m$, donc avec $m\mu$ et $m\mathrm{N}_3$. Il en résulte que les triangles $\mathrm{M}_3m\mathrm{N}_3$ et $\mathrm{M}_3m\mu$ sont égaux, et, par suite, que

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mathrm{N}_3m} = \widehat{\mathrm{M}_3\mu m}.$$

Or

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mathrm{N}_3m} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mathrm{T}_3} \quad \text{(côtés perpendiculaires)},$$

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mu m} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mu} \quad \text{(alternes internes)}.$$

Donc

$$\widehat{\mathrm{MM}_3\mathrm{T}_3} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1962.

(1903, p. 95.)

Soient

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + 2\mathrm{F}yz + 2\mathrm{G}zx + 2\mathrm{H}xy = 1,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

les équations de deux quadriques rapportées à un système quelconque d'axes rectangulaires passant par leur centre

commun; on demande de démontrer les propositions suivantes :

1° *Les conditions qui expriment que ces deux quadriques ont les mêmes axes de figure sont*

$$(1)\quad \begin{cases} U = (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0, \\ V = (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0, \\ W = (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$Hg - Gh = (Hg), \quad Bf - Fb = (Bf), \quad \ldots.$$

2° *La condition qui exprime que le plan ayant pour équation*

$$lx + my + nz = 0$$

coupe les deux quadriques données suivant deux coniques ayant les mêmes axes de figure est

$$(l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix} = 0.$$

Si les axes sont obliques et font entre eux des angles λ, μ *et* ν, *les conditions* (1) *prennent la forme*

$$\begin{aligned} &(Hg)\sin^2\lambda + (Bf)\sin^2\mu + (Fc)\sin^2\nu \\ &\quad + (Bc)(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\quad + [(Fg) + (Hc)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ &\quad + [(Hf) + (Bg)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \\ &(Ga)\sin^2\lambda + (Fh)\sin^2\mu + (Cg)\sin^2\nu \\ &\quad + [(Fg) + (Ch)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\quad + (Ca)(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ &\quad + [(Gh) + (Fa)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \\ &(Ah)\sin^2\lambda + (Hb)\sin^2\mu + (Gf)\sin^2\nu \\ &\quad + [(Hf) + (Gb)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\quad + [(Gh) + (Af)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ &\quad + (Ab)(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0. \end{aligned}$$

(GENTY.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

1. Étant données deux quadriques de même centre, on sait qu'il existe un trièdre de diamètres conjugués, commun à ces deux quadriques.

Soit (α, β, γ) un point d'un de ces diamètres, les plans diamétraux conjugués de cette direction par rapport aux deux quadriques sont confondus; ces plans sont

$$x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma = 0,$$
$$x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + z \varphi'_\gamma = 0,$$

$f = 0$ et $\varphi = 0$ étant les équations des quadriques. On doit avoir

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}.$$

Le trièdre conjugué commun est donc défini par les trois droites communes aux trois cônes

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \qquad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_z}{\varphi'_z}, \qquad \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z},$$

équations qui s'écrivent, en les développant,

$$(Ah)x^2 + (Hb)y^2 + (Cf)z^2 + [(Gb) + (Hf)]yz + [(Gh) + (Af)]zx + (Ab)xy = 0,$$

$$(Ga)x^2 + (Fh)y^2 + (Cg)z^2 + [(Fg) + (Ch)]yz + (Ca)zx + [(Gh) + (Fa)]xy = 0,$$

$$(Hg)x^2 + (Bf)y^2 + (Fc)z^2 + (Bc)yz + [(Fg) + (Hc)]zx + [(Bg) + (Hf)]xy = 0.$$

Pour que les quadriques aient mêmes axes de figure, il faut et il suffit que ces trois cônes soient capables d'un trièdre trirectangle.

En coordonnées rectangulaires, les conditions sont que les

sommes des coefficients de x^2, y^2, z^2 soient nulles; donc

$$U = (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0,$$
$$V = (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0,$$
$$W = (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0,$$

et, en coordonnées obliques, elles sont exprimées par les conditions de l'énoncé.

II. Soit (l', m', n') une direction du plan

$$lx + my + nz = 0, \qquad ll' + mm' + nn' = 0.$$

Les plans diamétraux conjugués de (l', m', n') par rapport aux deux surfaces sont

(1) $$l'f'_x + m'f'_y + n'f'_z = 0,$$
(2) $$l'\varphi'_x + m'\varphi''_y + n'\varphi'_z = 0.$$

Quand (l', m', n) varie en restant dans le plan

$$lx + my + nz = 0,$$

l'intersection de (1) et de (2) décrit le cône

(3) $$\begin{vmatrix} l & m & n \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = 0.$$

D'après la définition même de ce cône, le plan

$$lx + my + nz = 0$$

le coupe suivant deux droites qui forment le système de diamètres coujugués commun aux deux coniques d'intersection du plan et deux surfaces.

Pour que ces deux coniques aient mêmes axes, il faut et il suffit que le plan coupe le cône (3) suivant deux droites rectangulaires.

Or on sait que pour que

$$ux + vy + wz = 0$$

coupe le cône

$$F(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \ldots = 0$$

suivant deux droites rectangulaires, il faut que

$$(A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w) = 0.$$

Appliquant cette formule au cas présent, on obtient la condition

$$0 = (l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix},$$

car les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont respectivement

$$l(Hg) + m(Ga) + n(Ah),$$
$$l(Bf) + m(Fh) + n(Hb),$$
$$l(Fc) + m(Cg) + n(Gf).$$

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

2013. Un cercle a pour centre le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle donné et il est tangent à l'hypoténuse de ce triangle; les coniques qui ont pour foyers les extrémités de cette hypoténuse, et qui touchent le cercle, ont pour points de contact les sommets d'un triangle équilatéral.

(MANNHEIM.)

2014. Les axes des quadriques de révolution par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées engendrent un complexe linéaire. (R. BRICARD.)

2015. Un trièdre trirectangle a son sommet sur le côté E d'un angle donné. Du point, où l'autre côté D de cet angle rencontre l'une des faces de ce trièdre, on élève un plan perpendiculaire à ce côté. Ce plan coupe E en un point d'où l'on abaisse la perpendiculaire A à la face considérée. On détermine de même B, C pour les autres faces du trièdre. Démontrer que les deux droites qui rencontrent A, B, C, D sont perpendiculaires à D et perpendiculaires l'une à l'autre.

(MANNHEIM.)

TABLE DES MATIÈRES.

Avril 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,

Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,

Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

MAI 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[X4a et b]

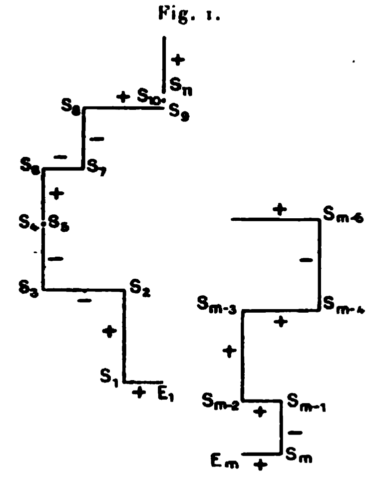
NOTE SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES POLYNOMES ALGÉBRIQUES;

PAR LE COMMANDANT L. DENY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Nous appelons *orthogone* une ligne brisée à angles droits telle que $E_m S_m \ldots S_1 E_1$ (*fig.* 1), dont les élé-

Fig. 1.



ments parallèles *consécutifs* sont marqués du *même signe* ou de *signes contraires* suivant qu'ils sont tracés d'un *même côté,* ou de *côté et d'autre* de l'élément perpendiculaire adjacent commun. Le mot *consécutif* implique la succession des sommets dans l'ordre naturel des indices, sans lacune. Si un ou plusieurs éléments sont nuls, comme au point double $S_4 - S_5$ ou au point

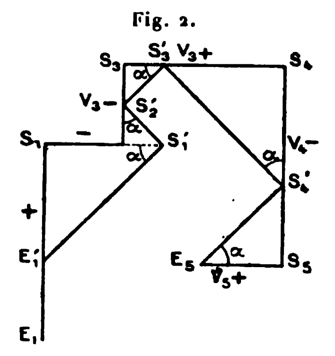
triple $S_9 - S_{10} - S_{11}$, pour appliquer la règle il faudra rétablir par la pensée les côtés absents et considérer chaque sommet simple comme origine des positifs et des négatifs, en tenant compte des précédents. Un choix initial reste arbitraire : en vue de la commodité des calculs, nous adoptons pour les deux directions commandées par le sommet S_m, supposées horizontale et verticale, les inverses des signes de la Géométrie analytique.

Il sera toujours possible de faire entrer à leur rang dans une construction orthogonale, et avec leur valeur et leur signe, les coefficients d'un polynome entier.

La figure obtenue représente une équation algébrique ; car elle prête à la recherche des facteurs irréductibles du polynome.

Soit, en effet, l'orthogone S de cinq sommets (*fig.* 2) :

Fig. 2.



une oblique $E_5 S'_4$, tracée sous l'angle α, peut servir de premier élément à un orthogone $S'_4 S'_3 \ldots$ ayant ses sommets sur les côtés du proposé et mêmes extrémités; $\tan\alpha$ étant quantité positive, V_5, V_4, ..., V_0 des nombres à signe latent représentant les côtés de S, on pourra écrire d'abord

$$S_5 S'_4 = V_5 \tan\alpha,$$

puis pour les restes successifs jusqu'au dernier :

$$S'_4 S_4 = V_5 \tang \alpha + V_4,$$
$$S'_3 S_3 = V_5 \tang^2 \alpha + V_4 \tang \alpha + V_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$E'_1 E_1 = V_5 \tang^5 \alpha + V_4 \tang^4 \alpha + V_3 \tang^3 \alpha$$
$$+ V_2 \tang^2 \alpha + V_1 \tang \alpha + V_0.$$

En vertu de la règle des signes, les sommes algébriques sont traduites par des expressions où n'intervient pas l'indication de *différence*, et il en résulte que celle du dernier reste $E'_1 E_1$ représente la valeur du polynome pour $x = + \tang \alpha$. Si ce reste est nul (E'_1 coïncidant avec E_1), $\tang \alpha$ sera une racine.

Dans le cas où $S_5 S_4$ aurait dû être tracé dans la direction opposée par rapport à S_5, V_4 serait un élément positif, et $\tang \alpha$ deviendrait une quantité négative. Nous laissons du reste au lecteur le soin d'examiner toutes les variantes possibles (inscription, ex-inscription, ou mélange des deux formes), qui peuvent se présenter. Nous ne voulons noter que ceci : S' figure le polynome quotient du proposé S par le facteur du premier degré correspondant à la racine, et il est facile de s'en assurer par un calcul analogue au précédent. Dès lors, on peut opérer sur l'inscrit de $m - 1$ sommets comme sur l'orthogone primitif, par conséquent arriver à la détermination de toutes les racines réelles et du polynome résidu irréductible ou tout au moins n'admettant plus de facteurs du premier degré.

Les ressources que l'on peut tirer ainsi de cette Géométrie ont déjà été remarquées. Dès 1867, les *Nouvelles Annales* (t. VI, p. 359) faisaient mention du procédé du capitaine Lill, de l'armée autrichienne, pour résoudre les équations par des figures identiques à celles que nous appelons *orthogones* et à l'aide d'un instrument dont la partie essentielle était un disque

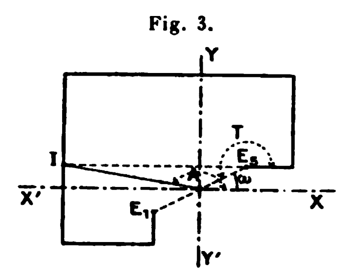
gradué portant quadrillage. En 1893, dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXI), M. G. Arnoux préconisait l'étude des mêmes figures et le principe d'un appareil, sorte de règle à compas, pour la recherche des facteurs ([1]). Ignorant ces travaux antérieurs (nous devons à la bienveillante érudition de M. Laisant de pouvoir les citer) et peu enclin à une méthode de tâtonnement que nous estimions décevante, nous avons envisagé la conception qui se présentait à notre esprit comme la base d'une sorte d'algèbre de forme particulière s'adaptant sans doute plus spécialement à la résolution des équations numériques, mais pouvant aussi atteindre la théorie. C'est cette tendance qui nous différencie de nos prédécesseurs.

Nous présentons ici les linéaments principaux de notre étude qui est susceptible d'extensions.

II. — Principes généraux.

Traçons, sur la figure 3, deux axes de projection,

Fig. 3.



parallèles aux côtés de l'orthogone, et passant par le

([1]) *Voir* pour plus amples renseignements :

A. Favaro, *Leçons de Statique graphique* (traduction P. Terrier). *Méthode de Lill* (IIe Partie, p. 197). Paris, Gauthier-Villars; 1885.

Publications de M. Gabriel Arnoux : Deux fascicules sur l'*Algèbre graphique* (Digne, Chaspoul, 1890); *A. F. A. S.* (Congrès de Marseille), 1891, *Étude de méthode graphique*.

milieu O de E_1E_m. En appelant R la moitié de cette ligne, il vient ([1]) :

$$V_m - V_{m-2} + V_{m-4} \ldots = -2R\cos\omega = +2R\cos A = +2R\cos T,$$

$$V_{m-1} - V_{m-3} + V_{m-5} \ldots = +2R\sin\omega = +2R\sin A = -2R\sin T.$$

Ces formules nous serviront tout d'abord à réduire à la même échelle deux figures données.

Soient S′ et S″ deux orthogones, l'un de trois, l'autre de quatre côtés, que nous faisons ainsi aboutir aux mêmes extrémités.

Portons sur chacun des côtés de S′ des semblables à S″ (*fig.* 4) et inversement sur les côtés de S″ des semblables à S′ (*fig.* 4bis). Ces constructions fournissent les deux mêmes directions rectangulaires, et à un facteur près $\left(\frac{1}{2R}\right)$ les côtés des superposés représentent en grandeur et en signe les sous-produits venant dans la multiplication des polynomes correspondant aux orthogones donnés.

Pour tracer le résultant S de cinq sommets, combinaison des proposés, il suffira de suivre graphiquement les phases de l'addition algébrique, c'est-à-dire de porter sur chaque direction, en tenant compte des signes, les longueurs qui figurent les produits élémentaires; le premier et le dernier sommet sont donnés immédiatement; le second et l'avant-dernier par la superposition de deux lignes; ainsi de suite.

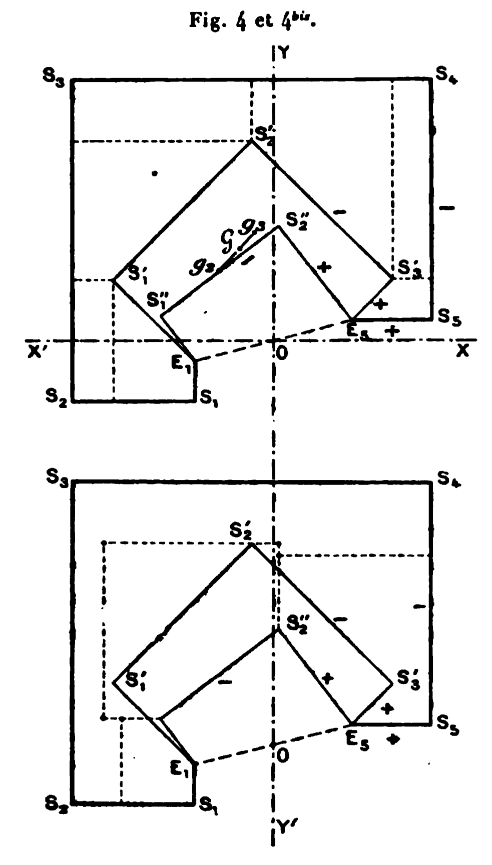
Les figures 4 et 4bis prêtent à deux remarques :

a. L'angle $E_1E_5S_5$ dans le résultant est la somme des angles $E_1E_5S'_3$ et $E_1E_5S''_2$ similaires dans les composants.

([1]) $A = \pi - \omega$, $T = \pi + \omega$, $A + T = 2\pi$.

b. Les axes de projections XX′, YY′ étant tracés sur les deux figures, si l'on appelle x, y; x', y'; x'', y'' les coordonnées des points S, S′, S″, on arrive facilement,

Fig. 4 et 4[bis].



en consultant alternativement les figures 4 et 4[bis], à vérifier les deux relations

$$\sum x = \sum x' + \sum x'',$$
$$\sum y = \sum y' + \sum y''.$$

D'où un énoncé général :

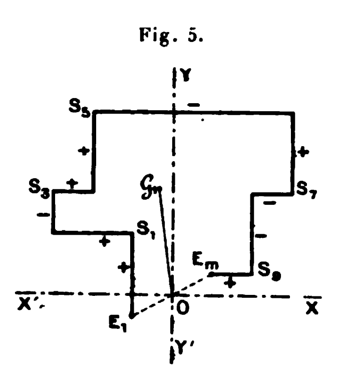
L'angle T, *que nous appellerons* ANGLE DE L'ORTHOGONE, *est la somme algébrique des mêmes angles dans les composants ; le point* G_1, *barycentre des sommets, est le résultant statique des similaires dans les composants.*

Ces propriétés fondamentales de l'orthogone subsistent à toutes les phases de la décomposition, qu'elle soit complète ou incomplète.

Nous avons déjà donné les expressions ressortissant à la notion de l'angle A égal à $(2\pi - T)$ (*fig.* 3); la méthode de projection nous servira encore à déterminer sous une forme analogue les coordonnées de G_1.

On a, en effet (*fig.* 5),

Fig. 5.



$$x_9 = + R\cos A + V_9,$$

$$x_8 = + R\cos A + V_9,$$

$$x_7 = + R\cos A + V_9 - V_7,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_1 = + R\cos A + V_9 - V_7 + V_5 - V_3 + V_1;$$

de sorte que, si l'on appelle R_1 la longueur OG_1 et A_1

l'angle GOX, il vient

$$mR_1 \cos A_1 = + mR\cos A + mV_m - (m-2)V_{m-2} + (m-4)V_{m-4} - \ldots \quad (^1)$$

et

$$mR_1 \sin A_1 = + mR\sin A - (m-1)V_{m-1} + (m-3)V_{m-3} - \ldots .$$

III. — Résolution des équations numériques.

Les principes que nous venons d'établir aboutissent à un procédé de recherche des racines par les intersections d'un cercle et d'une courbe.

Soit, en effet, S' orthogone solution du proposé S de huit sommets. On a (*fig.* 6)

$$y'_7 = y_8 + V_8 \operatorname{tang}\alpha,$$
$$y'_6 = y_7,$$
$$y'_5 = y_6 - V_8 \operatorname{tang}^3\alpha - V_7 \operatorname{tang}^2\alpha - V_6 \operatorname{tang}\alpha,$$
$$y'_4 = y_5,$$
$$y'_3 = y_4 + V_8 \operatorname{tang}^5\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_4 \operatorname{tang}\alpha,$$
$$y'_2 = y_3,$$
$$y'_1 = y_2 - V_8 \operatorname{tang}^7\alpha - \ldots\ldots\ldots\ldots - V_2 \operatorname{tang}\alpha.$$

Désignons par Y l'ordonnée du point sommet de l'orthogone du premier degré correspondant à la racine $\operatorname{tang}\alpha$, Y est égal à $\sum y - \sum y'$. Il vient

$$Y - y_1 = - V_8(\operatorname{tang}^7\alpha - \operatorname{tang}^5\alpha + \operatorname{tang}^3\alpha - \operatorname{tang}^1\alpha) + V_7(\operatorname{tang}^6\alpha - \operatorname{tang}^4\alpha + \operatorname{tang}^2\alpha) + \ldots + V_4 \operatorname{tang}^2\alpha + V_2 \operatorname{tang}^1\alpha,$$

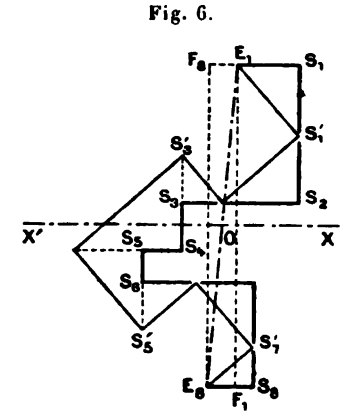
(1) A remarquer la parenté de ces formules avec celles de la dérivée analytique.

et de même

$$X - x_1 = - V_8(\tang^6\alpha - \tang^4\alpha + \tang^2\alpha)$$
$$- V_7(\tang^5\alpha - \tang^3\alpha + \tang^1\alpha) - \ldots$$
$$- V_4 \tang^2\alpha - V_2 \tang^1\alpha.$$

En éliminant $\tang\alpha$ on aura une courbe du septième

Fig. 6.



degré, dont l'équation sera, l'origine étant reportée au point $F_m(-R\cos A, +R\sin A)$,

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & x^7 - (V_8 - V_6 + V_4 - V_2)x^6 - (V_7 - V_5 + V_3)yx^5 \\ & \quad + (V_8 - V_6 + V_4)y^2x^4 + (V_7 - V_5)y^3x^3 \\ & \qquad - (V_8 - V_6)y^4x^2 - V_7y^5x + V_8y^6 = 0, \end{aligned} \right.$$

et les points-solution correspondant aux racines réelles seront marqués par les intersections de cette courbe avec la circonférence du cercle tracé sur E_1E_m comme diamètre.

Un calcul analogue sur un orthogone d'un nombre impair de sommets, sept par exemple, donnerait une courbe du sixième degré qui, rapportée à l'ori-

gine $F_1(+R\cos A, -R\sin A)$, aurait pour équation

$$(b)\quad \begin{cases} y^6+(V_6-V_4+V_2)y^5 \\ \quad +(V_7-V_5+V_3)xy^4-(V_6-V_4)x^2y^3 \\ \qquad -(V_7-V_5)x^3y^2+V_6x^4y+V_7x^5=0 \end{cases} \quad (^1).$$

En jetant les yeux sur le tableau des coordonnées des sommets, on voit pourquoi, x^{m-1} ou y^{m-1} étant positifs, les signes des autres coefficients se suivent dans la cadence $- - + +$ si m est pair, $+ + - -$ si m est impair; cette observation permet d'écrire les courbes (a) et (b) pour un degré quelconque, sans calculs.

Il peut paraître compliqué de baser la recherche des racines sur la détermination des points communs à une courbe de degré $m-1$ et à un cercle, les intersections étant normalement en nombre $2m-2$. Mais l'indécision n'est qu'apparente, car les courbes admettent un point de multiplicité $m-2$ qui est précisément l'origine, F_m ou F_1, située sur le cercle. Il ne reste donc que m intersections possibles répondant à la question.

Les courbes (a) et (b) sont d'une étude facile, mises sous la forme

$$(a)\qquad x=\varphi(\mu),\qquad y=\mu\,\varphi(\mu),$$

$$(b)\qquad x=\sigma\,\varphi(\sigma),\qquad y=\varphi(\sigma),$$

φ est une fonction de degré $m-2$; μ et σ l'inclinaison sur l'axe des X et sur l'axe des Y de droites partant de l'origine F_m ou F_1. On a du reste

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu\varphi'\mu+\varphi\mu}{\varphi'\mu}\quad\text{ou}\quad\frac{\varphi'\sigma}{\sigma\varphi'\sigma+\varphi\sigma}$$

(1) On peut aussi, en faisant intervenir $\cot\alpha$ au lieu de $\tan g\,\alpha$, trouver des conjuguées a' et b', mais qui sont rapportées, savoir : a' à l'origine F_1, b' à l'origine F_m, et dans lesquelles V_m, V_{m-1}, ... sont remplacés respectivement par V_0, V_1, ...

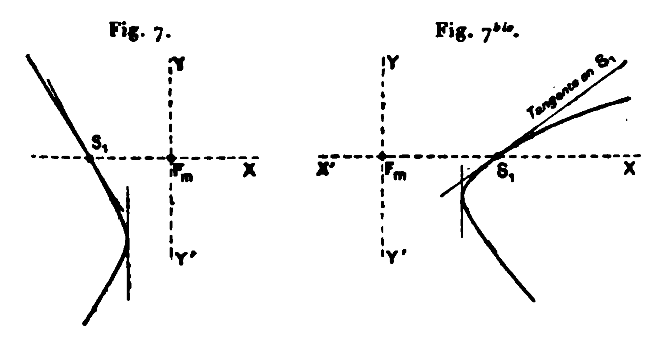
et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu\varphi''\mu + 2\varphi'\mu}{(\varphi'\mu)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi''\sigma}{(\sigma\varphi'\sigma + \varphi\sigma)^2}.$$

Nous resterons dans les généralités, ne voulant ici que donner des notions sur l'allure des courbes [1]

Courbes μ : *m est pair.* — $\mu = 0$ fournit S_1 dernier sommet de l'orthogone : la tangente en ce point $\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}$, soit $\frac{V_m - V_{m-1} \mp V_2}{V_{m-1} - V_{m-3} + \ldots}$, est en général inclinée sur l'axe de X.

Si $\varphi(\mu)$ n'a pas de racines réelles, x ne pourra être égal à 0, si ce n'est au point F_m qui restera isolé avec la multiplicité $m-2$. D'autre part, $\varphi'(\mu)$, fonction impaire, aura une racine et une seule fournissant un maximum ou un minimum de x par une tangente verticale. On aura donc l'une des deux formes 7 ou 7bis, la

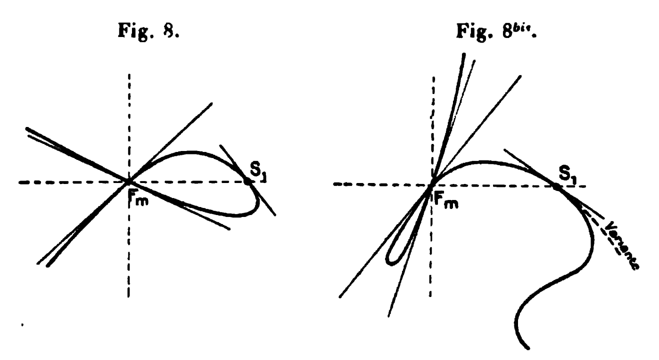


convexité étant toujours tournée vers l'axe des Y. Si l'on rapporte sur ces figures le cercle d'un orthogone,

[1] L'étude des cas particuliers, ceux où l'on suppose absents certains coefficients de φ, aboutit à une classification des équations en familles qui ressortissent à des tracés caractéristiques. Elle fournit, dans la pratique, des observations intéressantes.

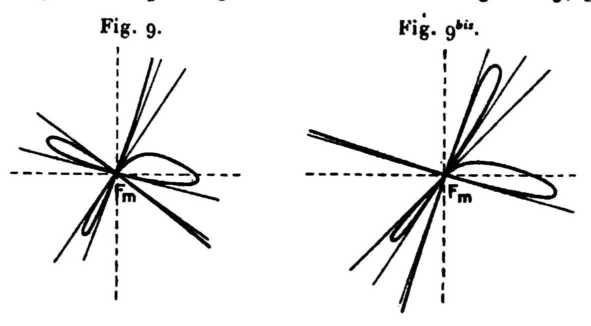
on reconnaît que, suivant les positions relatives de E_1 et de S_1, il y aura 0 ou 2 solutions.

Si $\varphi(\mu)$ a deux racines, de même signe ou de signes opposés, il y a deux tangentes à l'origine qui comporte alors un point isolé $m-4$ et un point double sur la courbe; car x et y changent de signe entre les racines. On aura une des deux formes 8 ou 8*bis* soit telles quelles,



soit inversées par rapport à l'axe des Y; $\varphi'(\mu)$ a une ou trois racines, d'où une ou trois tangentes verticales. Le nombre des racines de l'équation proposée ne peut pas être supérieur à quatre.

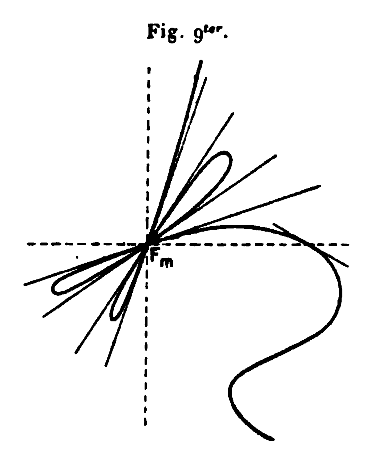
Avec quatre racines en $\varphi(\mu)$, suivant leur groupement possible par signes, on obtient les figures 9, 9*bis*



et 9*ter*, et il est aisé d'imaginer les formes que l'on

obtiendrait avec six, huit, etc. tangentes à l'origine; on aboutit en dernier lieu au cas où, φ ayant toutes ses

Fig. 9ter.



racines réelles, le point F_m est totalement soudé à la courbe.

Courbes σ : m est impair. — Dans les courbes σ l'allure générale est la même que dans les courbes μ. Signalons toutefois que le point S_1 (pour $\sigma = 0$) est sur l'axe des Y, et que l'origine F_1 est toujours sur le tracé de la courbe, à titre de point simple ou de multiplicité impaire. Les figures 10, 10bis, 10ter correspondent au cas où $\varphi(\sigma)$ a une, trois, ou cinq racines, et le polynome proposé un, un ou trois, un, trois ou cinq facteurs du premier degré.

Nous risquerions de laisser dans l'ombre un point important, si nous ne signalions pas un avantage inhérent à l'emploi des courbes que nous proposons, celui d'avoir le caractère d'une méthode. Pour le tracé et la détermination des accidents importants, nous sommes amené à l'étude d'un polynome de degré $m - 2$, avec

abaissement de deux degrés par rapport au polynome proposé, ou à celle des dérivées de φ_{m-2}. Mais les fonctions φ_{m-2} étant entières peuvent, d'après le même principe, être étudiées elles-mêmes à l'aide de fonc-

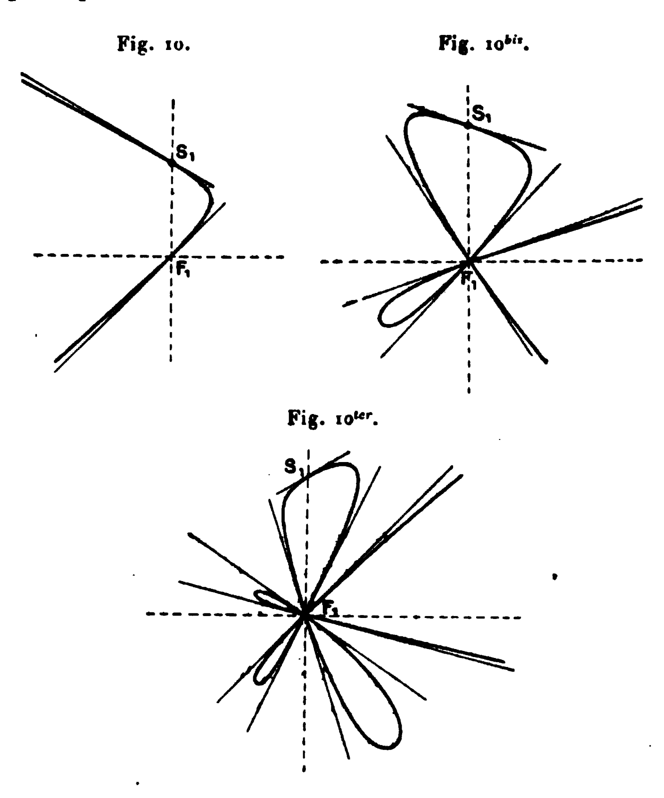


Fig. 10. Fig. 10bis. Fig. 10ter.

tions φ_{m-4}, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive au second ou au premier degré.

Il est facile de constituer la chaîne de ces polynomes.

Si l'on a, par exemple,

$$P_8 = V_8 x^8 + V_7 x^7 + \ldots,$$

il viendra successivement

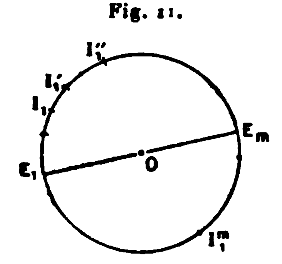
$$\varphi_6 = -V_8\mu_1^6 + V_7\mu_1^5 + (V_8 - V_6)\mu_1^4$$
$$- (V_7 - V_5)\mu_1^3 - (V_8 - V_6 + V_4)\mu_1^2$$
$$+ (V_7 - V_5 + V_3)\mu_1 + (V_8 - V_6 + V_4 - V_2),$$
$$\varphi_4 = +V_8\mu_2^4 - V_7\mu_2^3 - (2V_8 - V_6)\mu_2^2$$
$$+ (2V_7 - V_5)\mu_2 + (3V_8 - 2V_6 + V_4),$$
$$\varphi_2 = -V_8\mu_3^2 + V_7\mu_3 + (3V_8 - V_6).$$

On sait résoudre φ_2, et de là, par deux graphiques, on remontera à P_8.

IV. — Essai de discussion.

La théorie orthogonale aboutit en définitive à la représentation graphique des racines réelles $\tang\alpha$, $\tang\alpha'$, ... à l'aide de points I_1, I'_1, ... marquant sur la circonférence de cercle E_1E_m des arcs 2α, ... comptés à partir de E_1 (*fig.* 11). Si toutes les racines sont

Fig. 11.

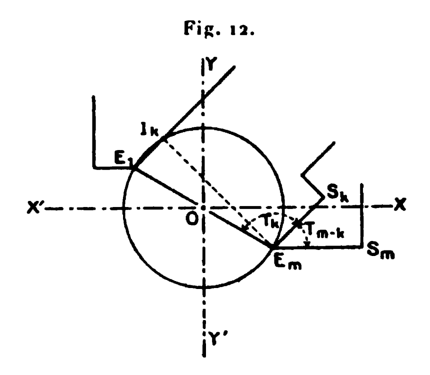


réelles on comptera m point I et leur barycentre (qui coïncide avec celui des sommets de l'orthogone, c'est-à-dire avec le point $G_1 : R_1 \frac{\cos}{\sin} A_1$) sera à l'intérieur du cercle. Voilà donc un premier criterium indicatif de la réalité des racines.

Nous pouvons combiner 2 à 2, 3 à 3, ..., k à k

les points I, c'est-à-dire faire les sommes algébriques de k arcs $E_1 I$ pour trouver des points I_k en nombre C_k^m. Si l'on peut déterminer le barycentre de chaque classe de points I, on aura $\frac{m}{2}$ critères $\left(\frac{m-1}{2}\text{ si } m \text{ est impair}\right)$. On arrive à ce résultat en remarquant (*fig.* 12) qu'un

Fig. 12.



point I_k est l'indice de l'existence réelle d'un orthogone S^k, lequel, combiné avec son coexistant S^{m-k}, doit reproduire le proposé S^m.

Les coordonnées, par rapport aux axes de l'orthogone S, pour un point I_k quelconque seront

$$x = R(\cos T_k \cos T_{m-k} + \sin T_k \sin T_{m-k}),$$
$$y = R(\cos T_k \sin T_{m-k} - \sin T_k \cos T_{m-k}).$$

Si l'on suppute les C_k^m abscisses et ordonnées, on trouvera pour leurs sommes tous les produits partiels provenant de la multiplication des deux polynomes S^k et S^{m-k}, c'est-à-dire de l'équation que nous écrivons symboliquement :

$$(V'_k + V'_{k-1} + V'_{k-2} + \ldots + V'_0)(V''_{m-k} + V''_{m-k-1} + \ldots + V''_0),$$

mais ces produits seront répartis entre $\sum x$ et $\sum y$,

d'après les résultats de la notation

$$(\cos T_k + \sqrt{-1}\sin T_k)(\cos T_{m-k} - \sqrt{-1}\sin T_{m-k}).$$

De plus, ils devront tous être divisés par 2, $\left(\frac{4R^2}{2R}\right)$.

La question étant posée ainsi, on vérifie sans difficultés que le premier terme de $\sum x$ est :

$$+\frac{1}{2}C_k^m V_m,$$

le deuxième

$$-\frac{1}{2}\frac{C_2^k + C_1^k C_1^{m-k} - C_2^{m-k}}{C_2^m} C_k^m V_{m-2},$$

et ainsi de suite, et qu'en définitive, si l'on appelle $R_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} A_k$ les coordonnées du point cherché, barycentre des points I_k, on peut écrire, toutes réductions faites, et en attribuant à C_0 la valeur de l'unité :

$$2R_k\cos A_k = \sum_{p=0}^{\frac{m}{2}\text{ ou }\frac{m-1}{2}} (-1)^p \frac{C_{2p}^k C_0^{m-k} - C_{2p-1}^k C_1^{m-k} + \ldots + C_0^k C_{2p}^{m-k}}{C_{2p}^m} V_{m-2p},$$

$$2R_k\sin A_k = \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}\text{ ou }\frac{m-2}{2}} (-1)^{p+1} \frac{C_{2p+1}^k C_0^{m-k} - C_{2p}^k C_1^{m-k} + \ldots + C_0^k C_{2p+1}^{m-k}}{C_{2p+1}^m} V_{m-(2p+1)}.$$

Dans ces formules, les symboles C^k et C^{m-k} n'ont de signification réelle que si l'indice inférieur, qui marque le nombre des objets combinés, est plus petit que k ou $m-k$, total des disponibles : cela suffit pour indiquer où s'arrête le calcul, dans chaque cas particulier, aux numérateurs.

On peut faire les remarques suivantes :

1° Le numérateur de V_{m-2p}, composé d'un nombre

pair de termes, conserve sa valeur et son signe quand l'on change k en $m-k$; celui de $V_{m-(2p+1)}$ change de signe. Les points G_k et G_{m-k} auront donc même abscisse et des coordonnées de signes contraires; et par suite, si l'on a un point $G_{\frac{m}{2}}$ (m pair), ce point sera sur l'axe des X.

2° Les points G ainsi définis sont en réalité en nombre $m+1$: car, parmi eux, il faut compter G_0 que nous avons défini antérieurement $R\,{}^{\cos}_{\sin}\,A$, et dont on retrouve les formules en faisant ici $k=0$. C'est le point I_0 de la figure 2; E_1 figure le point G_m. On trouve l'expression de G_1, en faisant $k=1$, sous la forme

$$2R_1\cos A_1 = V_m - \frac{m-4}{m}V_{m-4} + \frac{m-8}{m}V_{m-8} - \ldots \quad (^1),$$
$$2R_1\sin A_1 = \qquad \frac{m-2}{m}V_{m-1} - \frac{m-6}{m}V_{m-3} + \ldots .$$

Il est donc facile de trouver la valeur de R_1, de R_2, de R_3, ..., et il est évident que R_1, R_2, ... doivent être plus petits que R. Il en résulte que l'on a ainsi $\frac{m}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{m-1}{2}\right)$ conditions *nécessaires* pour que l'équation ait toutes ses racines réelles. Sous la forme où elles se présentent ces conditions ne sont pas *suffisantes*, car aussi bien que G_1, les points G_2, G_3, ..., tout en étant à l'intérieur du cercle de rayon R, peuvent résulter de

---

(1) Cette expression peut être identifiée avec celle que nous avons donnée antérieurement, en tenant compte de la valeur de $R\cos A$. Du reste, la fonction $R\cos A$ pourrait être mise en évidence dans $R_k\cos A_k$: il suffit, pour arriver à ce résultat, de remarquer que l'on a identiquement

$$C_0^k C_q^{m-k} + C_1^k C_{q-1}^{m-k} + \ldots + C_q^k C_0^{m-k} = C_q^m .$$

la composition de barycentres extérieurs afférents à des orthogones élémentaires irréductibles.

Ne voulant pas allonger cette Note, nous terminons sur le simple énoncé des considérations qui maintenant jalonnent pour nous la route.

Les relations obtenues entre les quantités R, A et V permettent, ne serait-ce que par les procédés connus de résolution d'un système d'équations linéaires, d'exprimer V en fonction de R et A : on le fait plus commodément à l'aide d'un calcul inverse de celui que nous avons présenté et l'on peut ainsi écrire les coefficients sous une forme qui donne des renseignements nouveaux. D'autre part, si l'on se reporte au schéma de la figure 12, on arrive à la conception de points-racines sommets d'un polygone inscrit indépendant du diamètre $E_1 E_m$, lequel, par sa position accidentelle, détermine un polynome algébrique particulier, c'est-à-dire une écriture analytique *passagère* du polygone. Il en résulte pour le polynome lui-même et pour les polygones I_k provenant du primitif I_1, des variations dont l'étude s'impose.

[H8c]

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. H. LAURENT.

L'équation générale des courbes du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$py^3 + (mx+n)y^2 + (ax^2+bx+c)y$$
$$+ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0,$$

p, m, n; a, b, c; α, β, γ, δ désignant des constantes qu'il faut éliminer; or en différentiant quatre fois, cinq fois, ..., 9 fois, on a

$$p\frac{d^4y^3}{dx^4}+(mx+n)\frac{d^4y^2}{dx^4}$$
$$+4m\frac{d^3y^2}{dx^3}+(ax^2+bx+c)\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+4(2ax+b)\frac{d^3y}{dx^3}+6.2a\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$p\frac{d^5y^3}{dx^4}+(mx+n)\frac{d^5y^2}{dx^4}$$
$$+5m\frac{d^4y^2}{dx^4}+(ax^2+bx+c)\frac{d^5y}{dx^5}$$
$$+5(2ax+b)\frac{d^4y}{dx^4}+10.2a\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

....

En éliminant p, $mx+n$, m, ax^2+bx+c, $2ax+b$, $2a$, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{d^4y^3}{dx^4} & \frac{d^4y^2}{dx^4} & 4\frac{d^3y^2}{dx^3} & \frac{d^4y}{dx^4} & 4\frac{d^3y}{dx^3} & 6\frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^5y^3}{dx^5} & \frac{d^5y^2}{dx^5} & 5\frac{d^4y^2}{dx^4} & \frac{d^5y}{dx^5} & 5\frac{d^4y}{dx^4} & 10\frac{d^3y}{dx^3} \\ \dots & \dots & 6\dots & \dots & 6\dots & 15\dots \\ \dots & \dots & 7\dots & \dots & 7\dots & 21\dots \\ \dots & \dots & 8\dots & \dots & 8\dots & 28\dots \\ \dots & \dots & 9\dots & \dots & 9\dots & 36\dots \end{vmatrix}=0.$$

Il serait aussi facile d'écrire l'équation différentielle des courbes d'un ordre quelconque, ainsi :

Si l'on pose $a_{ij}=\frac{d^iy^j}{dx^i}$, l'équation différentielle

d'une courbe de degré n s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant [1]

$$\begin{vmatrix} a_{n+1,n-1} & \frac{n+1}{1}a_{n,n-1} & a_{n+1,n-2} & \frac{n+1}{1}a_{n,n-2} & \frac{(n+1)n}{1.2}a_{n-1,n-2} & \cdots & a_{n+1,1} & \frac{n+1}{1}a_{n,1}\ldots \\ a_{n+2,n-1} & \frac{n+2}{1}a_{n+1,n-1} & a_{n+2,n-2} & \frac{n+2}{1}a_{n+1,n-2} & \frac{(n+2)(n+1)}{1.2}a_{n,n-2} & \cdots & a_{n+2,1} & \frac{n+2}{1}a_{n+1,1}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\frac{n(n+3)}{2},n-1} & \frac{n(n+3)}{2}a_{\frac{n(n+3)}{2}-1,n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

[P1e]

SUR LES ÉLÉMENTS DOUBLES DE DEUX FIGURES SEMBLABLES DANS L'ESPACE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soient OX, OY deux axes rectangulaires; considérons la droite isotrope $Y = Xi$, et faisons-la tourner de l'angle θ : elle ne cesse pas de coïncider avec elle-même, mais un point M de cette droite vient occuper une autre position M′ que nous déterminerons comme il suit. Soient OX′, OY′ deux axes rectangulaires obtenus en faisant tourner les premiers de l'angle θ;

---

[1] On a du reste

$$a_{ij} = \sum \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\ldots} y^{\alpha} y^{\beta} y^{\gamma}\ldots.$$

Les facteurs $y^{\alpha}y^{\beta}\ldots$ étant au nombre de j, et $\alpha+\beta+\ldots = i$; cette formule se déduit de la formule symbolique

$$\frac{d^n}{dx^n}(u, v, w, \ldots) = (u+v+w+\ldots)^n,$$

en posant $u = v = w = \ldots = y$.

les coordonnées du point M dans le système primitif étant X, Y, les coordonnées de ce point dans le système transformé sont

$$\begin{aligned} X' &= \quad X\cos\theta + Y\sin\theta = X(\cos\theta + i\sin\theta), \\ Y' &= -X\sin\theta + Y\cos\theta = Y(\cos\theta + i\sin\theta); \end{aligned}$$

comme X et Y sont aussi les coordonnées du point M' dans le nouveau système, on arrive à ce résultat : *les coordonnées du point* M *sont égales à celles du point* M' *multipliées par le facteur* $\cos\theta + i\sin\theta$.

2. Soient, dans l'espace, F et F' deux figures égales formées de droites issues d'un point O. Ce système a trois droites doubles ; l'une est l'axe OK de la rotation qui fait coïncider les deux figures, et nous appellerons θ l'angle de cette rotation ; les deux autres sont les isotropes OI, OJ du plan Π perpendiculaire à OK au point O, et l'on se rappellera que, si OI est une droite double en tant que droite indéfinie, un point M de OI n'est pas un point double.

Étant donnés deux trièdres trirectangles de même orientation Ox, Oy, Oz et Ox', Oy', Oz', qui sont homologues pour F et F', proposons-nous de déterminer les trois droites doubles. Si M est un point de la droite double OK, ce point (qui est un point double) a les mêmes coordonnées par rapport aux deux trièdres, et l'on a, avec $S = 1$,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x' & \text{ou} & ax + by + cz = Sx, \\ y' & \text{ou} & a'x + b'y + c'z = Sy, \\ z' & \text{ou} & a''x + b''y + c''z = Sz. \end{array} \right.$$

Si M est un point de la droite double OI, considéré comme point de la figure F, M' étant le point correspondant de la figure F', point distinct de M, situé tou-

tefois sur OM, les coordonnées du point M par rapport au second trièdre sont proportionnelles aux coordonnées du point M′ par rapport à ce second trièdre, c'est-à-dire aux coordonnées du point M par rapport au premier trièdre, de sorte que les coordonnées du point M sont proportionnelles dans les deux systèmes de référence; on a donc encore les relations (1), la valeur de S étant $\cos\theta + i\sin\theta$. Il suit de là que l'équation en S

$$\begin{vmatrix} a - S & b & c \\ a' & b' - S & c' \\ a'' & b'' & c'' - S \end{vmatrix} = 0$$

a pour racines 1 et $\cos\theta \pm i\sin\theta$.

Pour vérifier que 1 est racine, on peut écrire, avec $S = 1$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - 1 & b & c \\ a' & b' - 1 & c' \\ a'' & b'' & c'' - 1 \end{vmatrix}, \qquad 1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et la multiplication donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a & -b & -c \\ -a' & 1 - b' & -c' \\ -a'' & -b'' & 1 - c'' \end{vmatrix} = -\Delta = 0,$$

le déterminant étant d'ordre impair. L'équation développée devient

$$S^3 - (a + b' + c'')S^2 + (a + b' + c'')S - 1 = 0,$$

le coefficient de S résultant, si l'on veut, de l'existence de la racine 1; la suppression de cette racine donne l'équation

$$S^2 - (a + b' + c'' - 1)S + 1 = 0,$$

dont les racines doivent être $\cos\theta \pm i\sin\theta$. On doit

donc avoir

$$a + b' + c'' - 1 = 2\cos\theta,$$

et l'on peut vérifier cette égalité par les formules d'Olinde Rodrigues.

Pour vérifier que les deux droites doubles fournies par les deux dernières valeurs de S sont des isotropes, il suffit d'ajouter les équations (1) après les avoir élevées au carré; on obtient

$$(1 - S^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

[J'ai écarté le cas singulier $\theta = \pi$. Si M est alors un point du plan Π, il est aisé de voir que les coordonnées de ce point relativement aux deux trièdres ont même valeur absolue et des signes contraires : les coordonnées de M rapporté au premier trièdre sont, en effet, les coordonnées de M' rapporté au second trièdre, ou les coordonnées changées de signes de M rapporté au second trièdre, puisque M et M' sont symétriques par rapport à O. Dans ce cas, on a la racine double $S = -1$, et toutes les droites menées par le point O dans le plan Π sont des droites doubles.]

II.

3. Soient, dans l'espace, deux figures F et F' dont l'une est semblable à l'autre ou à la symétrique de l'autre. Il existe un point double O; une certaine droite réelle OK passant en O est une droite double en tant que droite indéfinie; le plan Π perpendiculaire en O à OK est un plan double en tant que plan indéfini. La transformation par laquelle on passe de F à F' est une homographie dont le tétraèdre double a pour sommets les points O, K, I, J, en appelant K le point à

l'infini sur OK, en appelant I et J les points cycliques du plan Π.

Une homographie dépend de 15 paramètres; une similitude dépendant de 7 paramètres seulement, il faut 8 conditions pour qu'une homographie soit une similitude; les conditions relatives à la nature du tétraèdre double sont au nombre de 7 seulement. On a 8 conditions en disant que le cercle de l'infini doit être une conique double.

4. Soit k le rapport d'homothétie des deux figures rendues homothétiques. Si M et M′ sont deux points correspondants des deux figures, la trace $O\mu$ du plan OMM′ sur le plan Π est bissectrice extérieure ou intérieure pour le triangle OMM′ selon que k est positif ou négatif; donc, en appelant μ le point où la droite MM′ perce le plan Π, on a

$$\frac{\overline{\mu M}}{\overline{\mu M'}} = k.$$

Si la transformation est définie par deux triangles semblables ABC, A′B′C′, et par le signe de k, dont la valeur absolue est $\frac{AB}{A'B'}$, *cette relation permet de construire le plan double* Π *en construisant sur les droites* AA′, BB′, CC′ *les trois points* α, β, γ *d'après les relations*

$$\frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha A'}} = k, \qquad \frac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta B'}} = k, \qquad \cdots$$

En appelant $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les conjugués des points α, β, γ par rapport aux segments AA′, BB′, CC′, le point double O est l'un des deux points communs aux trois sphères qui ont pour diamètres $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, à savoir

celui qui est dans le plan Π. *Si l'on projette* α_1, β_1, γ_1 *sur ce plan en* a_1, b_1, c_1, *les trois circonférences de ce plan qui ont pour diamètres* αa_1, βb_1, γc_1 *ont un point commun qui est le point* O. *Ayant* O, *on a la droite double* OK.

Si l'une des figures F et F' est égale à la symétrique de l'autre, les deux triangles sont égaux, et l'on a $k = -1$. Les points α, β, γ sont alors les milieux des segments AA', BB', CC'. *Les plans perpendiculaires aux droites* AA', BB', CC' *en* α, β, γ *se coupent, dans le plan* αβγ, *en un point* O *tel que l'un des tétraèdres* OABC, OA'B'C' *est égal au symétrique de l'autre.*

Si les deux figures sont égales, les deux triangles sont égaux, et l'on a $k = +1$. *Le plan* Π *disparaît à l'infini, et il en est de même du point* O. *La droite double continue d'exister.*

5. Si l'on définit un point m de la droite variable MM' par la relation

$$\frac{\overline{mM}}{\overline{mM'}} = S \times k,$$

S étant une constante, le calcul montre qu'il y a un lieu du point m, et que ce lieu est un plan, si S a l'une des valeurs 1, $\cos\theta \pm \sin\theta$; les trois plans ainsi obtenus sont les plans doubles OIJ, OKI, OKJ.

III.

6. Dans l'espace, les figures que donne la symétrie par rapport à un plan sont fournies au point de la grandeur par la symétrie par rapport à un point; le fait analogue n'a pas lieu en géométrie plane, si l'on

s'interdit de sortir du plan. Il faut alors étudier séparément la similitude (homographie dont les points doubles sont les points cycliques), et la transformation par laquelle on passe d'une figure à une figure inversement semblable (homographie dans laquelle chacun des points cycliques se transforme en l'autre).

Il existe dans chaque cas un point double O, et la recherche des droites doubles conduit aux équations

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta - S \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$S^2 - 2S\cos\theta + 1 = 0, \qquad S^2 - 1 = 0;$$

dans le premier cas, on a comme droites doubles les isotropes du point O; dans le second cas, on a deux droites doubles rectangulaires, avec des faits analogues à ceux du n° 4.

7. Si l'on veut rattacher ce qui se passe à propos du plan aux faits relatifs à l'espace, il faut supposer que les deux trièdres Ox, Oy, Oz et Ox', ..., considérés plus haut, ont leurs axes Oz et Oz' coïncidents ou opposés. Dans le premier cas, l'équation du troisième degré en S devient

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta - S & 0 \\ 0 & 0 & 1 - S \end{vmatrix} = 0,$$

etc. Dans le second cas, cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - S & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta - S & 0 \\ 0 & 0 & -1 - S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(S-1)(S+1)^2=0;$$

la racine double -1 s'explique par le fait que l'on est ici dans le cas singulier signalé à la fin du n° **2**.

[R8a]

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE;

PAR M. A. TRESSE.

Tout ce que nous avons dit dans notre article précédent, *Sur l'équilibre d'un corps solide* ([1]), s'étend à l'étude du mouvement d'un système invariable par la considération de ce qu'on appelle *force d'inertie*.

Écrivons les équations qui définissent le mouvement d'un point matériel de masse m, sous la forme

$$(2)\qquad \Sigma X - mJ_x = 0, \qquad \Sigma Y - mJ_y = 0, \qquad \Sigma Z - mJ_z = 0,$$

où J_x, J_y, J_z désignent les projections sur les excès de l'accélération J, et appelons *force d'inertie du point matériel* un vecteur égal et opposé au produit de sa masse m par son accélération J; ces trois équations expriment que le point est en équilibre sous l'action de cette force d'inertie et des forces proprement dites qui le sollicitent; ainsi interprétées, les équations (2) jouent, dans le cas *d'un seul point matériel*, le rôle des équations (1).

Pareillement, le mouvement d'un *système quelconque de n points matériels* sera défini par $3n$ relations de la forme (2), entre les forces intérieures, d'une part, et,

---

([1]) *Nouvelles Annales*, avril 1905, p. 153.

d'autre part, les forces extérieures et les forces d'inertie; ces $3n$ relations jouent le rôle des équations (α).

Enfin, dans le cas d'un *système invariable*, on déduit de ces $3n$ relations *six équations*, analogues aux équations (β), indépendantes des forces extérieures, qui définissent complètement le mouvement du système, les autres équations (α) déterminent les forces intérieures, toujours avec le même ordre d'indétermination et sous les mêmes restrictions.

Nous n'énonçons pas l'interprétation bien connue de ces nouvelles équations (β); bornons-nous à en signaler cette conséquence immédiate :

Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces extérieures appliquées à un corps solide lui impriment, dans les mêmes conditions initiales, le même mouvement, il faut et suffit que, dans les deux systèmes, la somme algébrique des projections des forces sur chacun des trois axes de coordonnées soit la même, ainsi que celle de leurs moments par rapport à chacun des mêmes axes.*

[P6d, P6f]

SUR LA TRANSFORMATION D'ERNEST DUPORCQ ET SUR CELLE DE LIE;

Par M. R. BRICARD.

1. On doit à E. Duporcq [1] une transformation de contact remarquable qui généralise celle de Lie, en

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVII, 1899, p. 146.

faisant correspondre aux droites de l'espace non les sphères, mais les quadriques circonscrites à une quadrique fixe.

Cette transformation a été présentée par le regretté géomètre sous une forme entièrement synthétique qui en rend les applications un peu pénibles.

On peut, comme on va le voir, définir, par des formules très simples, une transformation qui jouit de propriétés identiques à celles de Duporcq.

2. Proposons-nous, à cet effet, de résoudre le problème suivant :

Exprimer, en fonctions rationnelles de trois paramètres, les coordonnées d'une droite quelconque tangente à une quadrique fixe.

Soient

$$\frac{X - x_0}{p} = \frac{Y - y_0}{q} = \frac{Z - z_0}{r}$$

les équations d'une droite D. Les coordonnées pluckériennes de cette droite sont p, q, r, et les trois quantités

$$p' = q z_0 - r y_0, \quad q' = r x_0 - p z_0, \quad r' = p y_0 - q x_0.$$

On a l'identité fondamentale

$$(1) \qquad pp' + qq' + rr' = 0.$$

Exprimons que la droite D est tangente à la quadrique (Q) représentée par l'équation

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0.$$

On forme aisément l'équation

$$(3) \qquad p^2 + q^2 - r^2 + p'^2 + q'^2 - r'^2 = 0.$$

Cela posé, on tire de (1) et (3), par des combinaisons simples,

$$(4)\qquad (p+p')^2+(q+q')^2-(r-r')^2=0,$$
$$(5)\qquad (p-p')^2+(q-q')^2-(r+r')^2=0.$$

Nous résoudrons, d'une manière aussi générale que possible, le système précédent, en posant (à un facteur de proportionnalité près)

$$p+p'=4xy,\quad q+q'=2(x^2-y^2),\quad r-r'=2(x^2+y^2),$$
$$p-p'=-4z,\quad q-q'=2(z^2-1),\quad r+r'=2(z^2+1),$$

x, y, z étant trois quantités quelconques. On tire de là

$$(6)\quad \begin{cases} p=2(xy-z), & q=x^2-y^2+z^2-1, & r=x^2+y^2+z^2+1,\\ p'=2(xy+z), & q'=x^2-y^2-z^2+1, & r'=-x^2-y^2+z^2+1.\end{cases}$$

Les formules (6) *résolvent la question proposée.*

3. *Si l'on considère x, y, z comme les coordonnées d'un point, on voit que les formules* (6) *font correspondre à tout point m de l'espace une droite* D *qui touche la quadrique* (Q).

On vérifie sans peine que les équations de la droite D peuvent s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} (y^2+1)X\ +(xy-z)(Y-Z)+y^2-1\ =0,\\ (x^2+z^2)X-(xy-z)(Y+Z)-x^2+z^2=0.\end{cases}$$

La droite D *engendre une quadrique, quand le point m décrit une droite quelconque.*

Supposons en effet que le point m décrive la droite

$$y=ax+b,$$
$$z=cx+d.$$

Si l'on remplace dans les formules (6) y et z par les expressions précédentes, on trouvera pour p, q, r, p', q', r', des expressions de la forme

$$A_i x^2 + B_i x + C_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Or, entre *quatre* polynomes homogènes et du second degré en x et y, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. On peut donc former entre les coordonnées p, q, r, p', q', r', *trois* relations linéaires et homogènes, en général distinctes. Autrement dit, lorsque le point m décrit une droite, la droite correspondante D varie en appartenant à trois complexes linéaires : elle engendre donc une quadrique comme il est bien connu. Cette quadrique est d'ailleurs évidemment circonscrite à (Q).

On retrouve ainsi les propriétés caractéristiques de la transformation de Duporcq.

Je n'insiste pas sur les applications nombreuses que l'on peut faire de la transformation de Duporcq. Elles ont été exposées dans le cours professé par M. Humbert au Collège de France (semestre 1904-1905), sur les fonctions abéliennes et leurs applications géométriques, et dont tous les géomètres espèrent une publication prochaine.

4. Quand la quadrique (Q) dégénère en l'ombilicale, la transformation de Duporcq devient celle de Lie.

Pour retrouver les formules classiques qui définissent cette dernière, il est nécessaire d'user de quelques précautions.

A cet effet, considérons, au lieu de la quadrique (Q), la quadrique (Q′) représentée *en coordonnées tangentielles* par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 - \lambda^2 = 0, \tag{8}$$

La condition pour que la droite D lui soit tangente est

$$(9)\qquad p^2+q^2+r^2-\lambda^2(p'^2+q'^2+r'^2)=0,$$

d'où, par combinaison des équations (1) et (9),

$$(p+i\lambda p')^2+(q+i\lambda q')^2+(r+i\lambda r')^2=0,$$
$$(p-i\lambda p')^2+(q-i\lambda q')^2+(r-i\lambda r')^2=0.$$

Je résoudrai le système précédent en posant

$$(10)\quad \begin{cases} p+i\lambda p' = x^2-1, & p-i\lambda p' = (x+\lambda z)^2-(1+\lambda y)^2,\\ q+i\lambda q' = -i(x^2+1), & q-i\lambda q' = -i[(x+\lambda z)^2+(1+\lambda y)^2],\\ r+i\lambda r' = -2x, & r-i\lambda r' = -2(x+\lambda z)(1+\lambda y), \end{cases}$$

d'où l'on tire p, q, r, p', q', r'.

Les expressions obtenues conviennent quel que soit λ; si la quadrique (Q'), en particulier, se réduit à l'ombilicale, c'est-à-dire si l'on fait $\lambda=0$, elles ne deviennent pas illusoires, grâce à la forme choisie pour les seconds membres des relations (10).

On trouve en ce cas

$$\begin{aligned} p &= x^2-1, & p' &= i(xz-y),\\ q &= -i(x^2+1), & q' &= xz+y,\\ r &= -2x, & r' &= -i(xy+z), \end{aligned}$$

et la droite correspondante a pour équations

$$X+Yi+xZ+z=0,$$
$$2(X-Yi)-Z+y=0.$$

Ce sont les équations bien connues de la transformation de Lie.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie analytique a deux dimensions (sections coniques); par M. *H. Mandart*, ancien élève de l'École Normale des Sciences de Gand, professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Tongres. — 1 vol. in-8° de VIII-574 pages. Namur, Wesmael-Charlier; 1904. Prix : 10^fr.

En Belgique on étudie, en deux fois, les courbes de second ordre. Dans l'enseignement secondaire, la théorie est exposée à peu près comme dans les premiers Chapitres de G. Salmon : le point de vue géométrique domine; les variétés des coniques sont examinées successivement et représentées par leurs équations réduites; on ne s'élève guère à des vues d'ensemble. Il en est autrement dans les Facultés : la conique devient la forme quadratique ternaire; ses propriétés projectives traduisent les relations liant les dérivées partielles de la forme, le discriminant, le divariant, etc.; ses propriétés métriques s'obtiennent en lui adjoignant les points cycliques.

Le Livre de M. Mandart rompt avec cette tradition. Il est manifestement destiné à des débutants, comme le prouvent, d'une part, le grand développement donné aux principes et, d'autre part, l'exclusion des notations symboliques. Mais en même temps il va droit aux considérations les plus générales et les plus fécondes. D'un bout à l'autre, le travail est imprégné d'invariantologie; depuis les propriétés les plus usuelles du cercle et des coniques jusqu'à celles des faisceaux et des réseaux tant ponctuels que tangentiels, tous les faits géométriques répondent à des invariants déduits des équations des figures. Nous croyons qu'il serait difficile de faire un Livre plus homogène et plus complet.

Convient-il pour l'enseignement? Nous en sommes convaincu, d'autant plus que l'auteur professe ces matières depuis nombre d'années.

L'Ouvrage de M. Mandart mérite donc beaucoup mieux que

l'indifférence. Il aura de chauds partisans; mais, par contre, nous osons lui prédire, et ceci n'est pas un mauvais compliment, qu'il aura pour adversaires, en Belgique, tous ceux que leur grandeur ou leur petitesse attache au rivage de la routine. M. STUYVAERT.

CORRESPONDANCE.

M. **H. Brocard**. — S'il m'est permis d'apporter un témoignage qui pourra paraître intéressé, sinon intéressant, au sujet de la remarque de M. Massing (1905, p. 179-180), je dirai que je la retrouve dans les Notes sur la question 1545, dont l'énoncé, dû à M. Chauliac, renferme au paragraphe V la proposition plus générale que voici :

Si l'on considère trois normales quelconques à une parabole (ne se coupant pas au même point), le point de rencontre des hauteurs du triangle des normales et le point de rencontre des hauteurs du triangle des tangentes sont sur un même diamètre.

Il suffit donc de supposer les trois normales issues d'un point M.

C'est le théorème énoncé par M. Massing (*loc. cit.*)

J'ignore si cette remarque particulière a été faite antérieurement; cela me paraît bien probable et je l'attribuerai volontiers à M. Chauliac (question 1545, 1885, p. 440), mais M. Emmerich l'a énoncée très explicitement dans *Mathesis*, 1903, p. 236, à l'occasion de sa réponse à la question 1033 (R. TUCKER, *Mathesis*, 1895, p. 215) relative à la parabole et à trois normales concourantes ou quelconques.

J'ai toujours pensé que cette configuration donnerait le sujet d'une étude bibliographique méritant l'attention des mathématiciens; mais, si cette publication a pu être ajournée sans inconvénient, je crois devoir retenir trois questions qui la justifieraient pleinement, les questions précitées de MM. Chauliac et Tucker, et la question 316 (G. DE LONGCHAMPS, *Journal de Math. sp.*) résolue en 1892, p. 211-215.

M. **Troin**. — La question 2008 proposée sous mon nom dans le numéro de février 1905 des *Nouvelles Annales* n'est pas nouvelle, au moins en ce qui concerne la deuxième partie.

La propriété qui fait l'objet de cette deuxième partie se trouve énoncée dans *Exercices sur la géométrie du triangle* de M. Laisant (p. 16, quest. 53) et les renseignements bibliographiques qui l'accompagnent indiquent que la question fut proposée par M. d'Ocagne dans le *Journal de Math. élém.* de M. de Longchamps et résolue dans l'année 1889 de ce journal aux pages 92 et 116 par M. d'Ocagne lui-même.

J'ignore si la propriété qui fait l'objet de la première partie de la question 2008 fut énoncée par M. d'Ocagne dans une de ses solutions.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1805.

(1898, p. 388.)

Étant donnée l'équation

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= ax^n - nbx^{n-1} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} - \ldots - nkx + l = 0, \end{aligned}\right.$$

dont le degré $n = 2\nu$ est pair, si l'on désigne par φ_1, φ_2, φ_3, ... les dérivées successives de $\varphi(x)$, divisées respectivement par n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, ..., l'équation en z

$$f(z) = \begin{vmatrix} \varphi_\nu + z & \varphi_{\nu-1} & \varphi_{\nu-2} & . & \ldots & \varphi \\ \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu - \dfrac{z}{\nu} & \varphi_{\nu-1} & . & \ldots & \varphi_1 \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu + \dfrac{1.2}{\nu(\nu-1)}z & . & \ldots & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & .. \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots\ldots & \varphi_\nu \mp \dfrac{z}{\nu} & \ldots & \varphi_{\nu-1} \\ a & \varphi_{n-1} & \ldots\ldots & \varphi_{\nu+1} & \ldots & \varphi_\nu \pm z \end{vmatrix}$$

est indépendante de x.

Trouver les relations qui lient les racines de l'équation en x à celles de l'équation en z.

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

En posant

$$\psi(x) = bx^{n-1} - (n-1)cx^{n-1} + \ldots + (n-1)kx - l,$$

on aura la relation

$$\psi(x) = x\varphi_1 - \varphi$$

qui, appliquée aux dérivées successives, conduit aux égalités

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} b &= ax - \varphi_{n-1}, \\ c &= ax^2 - 2x\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ bx - c &= x\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}, \\ cx - d &= x^2\varphi_{n-1} - 2x\varphi_{n-2} + \varphi_{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Si R est une fonction homogène *quelconque* des coefficients de (A), nous désignerons par R' cette même fonction où nous remplacerons $a, b, c, \ldots, k, l$ par $a, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi$.

Dans le déterminant $f(z)$, remplaçons chaque horizontale de rang $p+1$ *en remontant*, par celle obtenue en ajoutant termes à termes les horizontales inférieures respectivement multipliées par les termes de $(x-1)^p$ développé, c'est-à-dire la première H_1 par H_1, la deuxième H_2 par $xH_1 - H_2$, la troisième H_3 par $x^2H_1 - 2xH_2 + H_3$, et ainsi de suite.

Dans le nouveau déterminant, égal à $\pm f(z)$, opérons de même sur les verticales, en allant *de la gauche vers la droite*, ou remplaçons la première V_1 par V_1, la deuxième V_2 par $xV_1 - V_2$, ..., et nous aurons un nouveau déterminant égal à $+f(z)$, car, si la première substitution a changé le signe de $f(z)$, la seconde le rétablit, en le changeant de nouveau.

Pour avoir le terme connu, soit R' de $f(z)$, on fera $z = 0$, ce qui donne, d'après les égalités (1), après les deux substitu-

tions successives,

$$R' = \begin{vmatrix} g & . & . & \dots & k & l \\ . & . & . & \dots & . & k \\ c & . & . & \dots & . & . \\ b & . & . & \dots & . & . \\ a & b & c & \dots & . & g \end{vmatrix} = R.$$

Rétablissons les termes en z en faisant abstraction des autres et considérons l'élément $A_{p+1,q+1}$ appartenant à la $(p+1)^{\text{ième}}$ horizontale et à la $(q+1)^{\text{ième}}$ verticale. En remplaçant H_{p+1} par

$$x^p H_1 - p x^{p-1} H_2 + \dots \mp p x H_p \pm H_{p+1},$$

on amène dans A, si $p + q > \nu$, un terme en z, recueilli dans la diagonale principale, sur l'horizontale $H_{p'+1}$, si $p' + q = \nu$. Ce terme recueilli, soit B, a pour valeur

$$B = \frac{\pm 1.2\dots p'}{\nu(\nu-1)\dots(\nu-p'+1)} z$$

ou

$$B = \frac{\pm 1.2\dots(\nu-q)}{\nu(\nu-1)\dots(q+1)};$$

et, amené dans A, il devient

$$C = \frac{\pm p(p-1)\dots(p-\nu+q+1)}{1.2\dots(\nu-q)} x^{p+q-\nu} \times B$$

ou

$$(2) \qquad C = \frac{\pm p(p-1)\dots(p-\nu+q+1)}{\nu(\nu-1)\dots(q+1)} z x^{p+q-\nu}.$$

En faisant $p = \nu, \nu-1, \nu-2, \dots$ et donnant à q les valeurs $0, 1, 2, \dots, \nu$, que q peut prendre, on aura dans $H_{\nu+1}$:

$$(-1)^\nu [z, zx, zx^2, \dots, zx^\nu];$$

dans H_ν :

$$(-1)^\nu \frac{1}{\nu} [0, z, 2zx, \dots, \nu z x^{\nu-1}];$$

dans $H_{\nu-1}$:

$$(-1)^\nu \frac{1.2}{\nu(\nu-1)} \left[0, 0, z, \dots, \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} z x^{\nu-2}\right];$$

et ainsi de suite.

Si maintenant nous remplaçons V_{q+1} par

$$x^q V_1 - q x^{q-1} V_2 + \ldots \mp q x V_q \pm V_{q+1},$$

le total des termes amenés dans $H_{\nu+1}$ sera

$$(-1)^\nu z x^q (1-1)^q = 0 \qquad (\text{si } q \neq 0).$$

Dans H_ν, ce total serait

$$(-1)^\nu \frac{z}{\nu} x^{q-1} (1-1)^{q-1} = 0 \qquad (\text{si } q \neq 1).$$

Il en sera de même dans toutes les horizontales.

En résumé, les z amenés par les substitutions des lignes sont détruits par les substitutions des colonnes, sauf dans la diagonale principale où ils changent de signes avec ν impair, ce qui importe peu, puisque alors $f(z) = f(-z)$.

On aura donc finalement

$$(\mathrm{B}) \qquad f(z) = \begin{vmatrix} g+z & . & \ldots & l \\ \ldots\ldots & g - \frac{z}{\nu} & \ldots & k \\ c & \ldots\ldots & \ldots & . \\ b & c & \ldots & . \\ a & b & \ldots & g+z \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (B) jouit des propriétés suivantes :

1° Elle reste la même quand on y change les signes des coefficients b, d, f, ... : quand on y permute les coefficients a, b, c, ..., h, k, l équidistants des extrêmes et quand on y remplace a, b, c, ..., l par a, $\varphi_{n-1}(m)$, $\varphi_{n-2}(m)$, ..., $\varphi_1(m)$, $\varphi(m)$, quel que soit m, ou elle convient aux équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(-x) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \qquad \varphi(m-x) = 0.$$

2° Avec ν *impair*, elle ne contient que les puissances paires de z, puisque $f(z) = f(-z)$, ou elle est de la forme

$$z^{\nu+1} + p\lambda z^{\nu-1} + q\Delta z^{\nu-3} + \ldots + s\mathrm{R} = 0,$$

p, q, ..., s étant numériques.

3° Si ν est *pair*, elle ne contient pas le second terme, car, si l'on développe $f(z)$, après avoir multiplié les lignes par $1, \nu, \frac{\nu(\nu-1)}{2}, \ldots$, le coefficient de z^ν sera

$$\pm g\left(1-\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{2}+\ldots\mp\nu\pm 1\right)=\pm g(1-1)^\nu=0$$

ou elle est de la forme

$$z^{\nu+1}+p\lambda z^{\nu-1}+q'\omega z^{\nu-2}+\ldots+s'R.$$

4° La fonction λ s'obtient facilement en remplaçant dans $\varphi(x)$ les puissances croissantes de x par $a, b, c, \ldots, k, l$, comme on peut s'en assurer en développant.

5° On a

$$\lambda'=\lambda, \qquad \omega'=\omega, \qquad \Delta'=\Delta, \qquad \ldots, \qquad R'=R.$$

6° Si l'équation (A) a $\nu+1$ racines égales annulant φ, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$, on aura les conditions de multiplicité

$$\lambda=0, \qquad \omega=0, \qquad \Delta=0, \qquad \ldots, \qquad R=0,$$

avec ν pair.

Quant aux relations qui lient les racines de (B) à celles de (A), on les trouvera en s'aidant de celles qui, dans chacune d'elles, lient ses racines à ses coefficients.

Applications. — I. $n=2$ ou

$$\varphi(x)=ax^2-2bx+c=0.$$

Si

$$\lambda=b^2-ac,$$

on a

$$z^2-\lambda=0.$$

II. $n=4$ ou

$$\varphi(x)=ax^4-4bx^3+6cx^2-4dx+e=0.$$

Si

$$3\lambda=3c^2-4bd+ae, \qquad \omega=\begin{vmatrix} c & d & e \\ b & c & d \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

on a

$$z^3-3\lambda z-2\omega=0.$$

Avec une racine double annulant φ et φ_1, on a

$$\varphi_2^2 = \lambda', \qquad \varphi_2^3 = \omega'$$

et, par suite,

$$\lambda^3 - \omega^2 = 0 \qquad \text{(résultante de Cayley).}$$

D'ailleurs $\lambda = 0$, $\omega = 0$ avec une racine triple.

III. $n = 6$ ou

$$\varphi(x) = ax^6 - 6bx^5 + 15cx^4 - 20dx^3 + 15ex^2 - 6fx + g = 0.$$

Si

$$10\lambda = 10d^2 - 15ce + 6bf - ag, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} d & e & f & g \\ c & d & e & f \\ b & c & d & e \\ a & b & c & d \end{vmatrix},$$

on a

$$z^4 - 10\lambda z^2 + 9\Delta = 0.$$

Avec une racine triple annulant φ, φ_1, φ_2, on a

$$\varphi_3^2 = \lambda', \qquad \varphi_3^4 = \Delta' \qquad \text{et, par suite,} \qquad \lambda^2 = \Delta.$$

D'ailleurs,

$$\lambda = 0, \qquad \Delta = 0$$

avec une racine quadruple.

1932.

(1902, p. 336.)

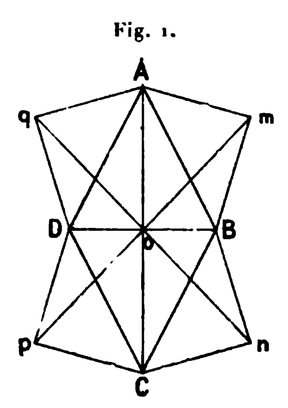
Étant donné un quadrilatère convexe ABCD, *on considère des plans reliés aux tiges* AB, BC, CD, DA. *On demande de trouver, respectivement dans ces plans, quatre points m, n, p, q tels que la droite mp soit égale et perpendiculaire à la droite nq pour toutes les déformations du quadrilatère. Démontrer que les milieux des droites mp, nq et des diagonales du quadrilatère sont les sommets d'un carré.* (J. Réveille.)

SOLUTION

Par M. *Canon*.

Extérieurement au losange ABCD de centre O (*fig.* 1) pre-

Fig. 1.



nons sur les bissectrices des angles formés par les diagonales AC, BD les points m, n, p, q à égales distances de O. Les droites mp, nq sont alors égales et à angle droit. Le losange étant supposé articulé, si on le déforme, les droites mp, nq passeront toujours par le point O. Si la droite mO doit toujours être la bissectrice de l'angle BOA, il faut que le point m soit le sommet de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle AmB; car les points A, m, B, O sont toujours sur un cercle puisque alors les angles AmB, BOA sont droits et par suite l'angle mOA est égal à mBA, c'est-à-dire à 45°.

Ainsi :

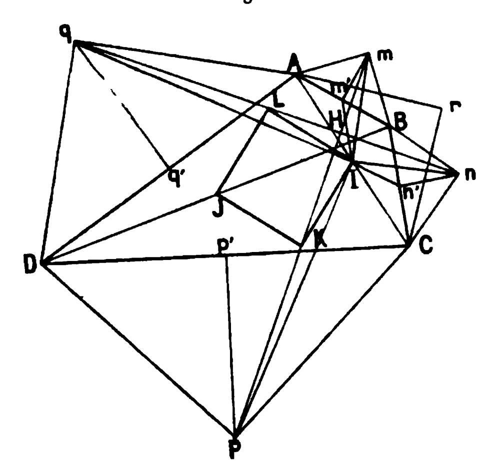
Si les triangles rectangles isoscèles AmB, BnC, CpD, DqA *sont liés invariablement aux côtés* AB, BC, CD, DA, *les droites mp, nq sont égales et à angle droit quelle que soit la déformation du losange articulé* ABCD.

Nous allons voir que cette propriété est vraie pour un quadrilatère convexe quelconque.

Prenons (*fig.* 2) le quadrilatère ABCD et les triangles rectangles isoscèles AmB, BnC, CpD, DqA. Appelons m', n',

p', q', I, J les milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère. Menons les droites Im', In', mm', nn'. Le segment mm' est égal à m'B et alors aussi à In'; de plus mm' est perpendiculaire à In'. De même nn' est égal et perpendiculaire à Im'. Et comme les angles nn'I, I$m'm$ sont égaux, nous voyons que les triangles nn'I, I$m'm$ sont égaux et ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; par suite les segments Im, In sont égaux et à angle droit. Il en est de même de Ip, Iq. Les angles nIq, mIp étant égaux, les triangles nIq,

Fig. 2.



mIp sont égaux et ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, donc *les segments mp, nq sont bien égaux et à angle droit, quel que soit le quadrilatère convexe* ABCD.

On peut dire que le point I est le centre de rotation autour duquel on peut faire tourner le segment mp pour l'amener en coïncidence avec nq. Le milieu K de ce segment mp vient coïncider avec le milieu L de nq, *les segments i*K, *i*L *sont donc égaux et à angle droit.*

On peut dire de même, en appelant J le milieu de BD, que *les segments* JL, JK *sont égaux et à angle droit.*

Les points I, K, J, L sont alors sur un cercle. Mais le point I, étant à égales distances des droites mp, nq, est sur la bissectrice HI de l'angle pHn. De même le point J est sur la bis-

sectrice de l'angle droit pHq. L'angle JHI est alors droit et le cercle JLIK passe par le point H.

Le segment IJ est un diamètre de ce cercle et l'angle JLI est droit, donc le quadrilatère IKJL est un carré.

Remarques. — I. Cette dernière propriété est indépendante du quadrilatère. *Lorsque l'on a deux segments égaux à angle droit, les centres de rotation qui permettent d'amener l'un des segments en coïncidence avec l'autre et les milieux des deux segments sont les sommets d'un carré.*

II. Dans le courant de la démonstration précédente se trouve établi ce théorème :

On a un triangle quelconque ABC (*fig.* 2) *et les triangles rectangles isoscèles* AmB, BnC; *les droites qui vont du milieu* I *de* AC *aux sommets m et n sont égales et à angle droit.*

III. En s'appuyant sur cette propriété, on voit tout de suite que, *si* ABCD *est un parallélogramme, le quadrilatère $mnpq$ est un carré.*

IV. Réunissons en A les sommets A et B du quadrilatère. On n'a plus alors que le triangle ADC. Soit r le sommet de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle extérieur à ADC et dont l'hypoténuse est AC : *le segment* Ap *est égal et perpendiculaire à qr.*

V. On a une droite telle que Ap pour les sommets B, C. Ces droites coïncidant avec les hauteurs du triangle pqr passent par un même point, on retrouve ainsi que : *les droites partant de* A, C, D *et aboutissant respectivement aux sommets p, q, r passent par un même point.*

Note. — L'élégante réponse de M. *Canon* ne fait connaître qu'une solution particulière de la question 1932. Le problème est assez facilement abordable par l'emploi des imaginaires [1]

---

[1] Pour l'application des imaginaires à la théorie des systèmes articulés, on consultera utilement un Mémoire de M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1879, p. 151).

(*méthode des équipollences*). On parvient ainsi aux résultats suivants, que je laisse au lecteur le soin d'établir :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — *Le quadrilatère* ABCD *n'est pas un parallélogramme.*

Construisons un carré $\alpha\beta\gamma\delta$, de centre ω, et un triangle $I\omega K$, isoscèle et rectangle en ω, tel que le sens dans lequel il faut parcourir le périmètre du carré pour rencontrer les sommets dans l'ordre α, β, γ, δ soit le sens de la rotation d'un angle droit qui amène ωI sur ωK

le triangle	AmB	directement semblable au triangle	$I\alpha K$,
»	BnC	»	$I\beta K$,
»	CpD	»	$I\gamma K$,
»	DqA	»	$I\delta K$.

Le segment mp est égal et perpendiculaire au segment nq, et cette propriété subsiste quand le quadrilatère ABCD *se déforme, les côtés* AB, BC, CD, DA *entraînant respectivement les points* m, n, p, q.

Cette construction fait connaître la solution, aussi générale que possible, de la question 1932.

On obtient la solution de M. *Canon* en supposant que le carré $\alpha\beta\gamma\delta$ se réduit au point ω.

Il est à noter que la propriété énoncée à la fin de la question 1932 : *les milieux des droites mp, nq et des diagonales du quadrilatère sont les sommets d'un carré,* ne se vérifie pas en général.

SECONDE HYPOTHÈSE. — *Le quadrilatère* ABCD *est un parallélogramme.*

Il suffit alors que le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ soit un *parallélogramme,* et non plus nécessairement un *carré.* Sa construction se poursuit exactement comme dans la première hypothèse.

R. B.

2001.

(1904, p. 528.)

L'hyperboloïde déterminé par l'axe d'une quadrique de révolution et par deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique est équilatère. (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soient

$$A(x^2+y^2)+Cz^2-1=0$$

l'équation de la quadrique donnée,

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma},$$

$$\frac{x-a'}{\alpha'}=\frac{y-b'}{\beta'}=\frac{z'-c'}{\gamma'}$$

celles des droites conjuguées, on a

(1) $$A(aa'+bb')+Ccc'=1,$$

(2) $$A(\alpha\alpha'+\beta\beta')+C\gamma\gamma'=0,$$

(3) $$A(a\alpha'+b\beta')+Cc\gamma'=0,$$

(4) $$A(a'\alpha+b'\beta)+Cc'\gamma=0;$$

λ étant la cote d'un point P de l'axe des z, les équations de la parallèle menée, par l'origine, à la droite menée par P et rencontrant les deux droites sont

$$x(b\gamma-c\beta)+y(c\alpha-a\gamma)+z(a\beta-b\alpha)+\lambda(bx-ay)=0.$$

$$x(b'\gamma'-c'\beta')+y(c'\alpha'-a'\gamma')+z(a'\beta'-b'\alpha')+\lambda(b'x-a'y)=0.$$

Après avoir éliminé λ, il faut vérifier que la somme des coefficients des carrés de x, y et z est nulle ou

$$(aa'+bb')(\gamma-\gamma')+c'(a\alpha'+b\beta')-c(a'\alpha+b'\beta)=0.$$

Nous pourrons prendre $\gamma=\gamma'=1$, en tenant compte des relations (3) et (4), la condition est vérifiée.

Si γ ou $\gamma'=0$, la droite correspondante est parallèle au plan xOy, l'autre rencontre l'axe de révolution; l'hyperboloïde se réduit à deux plans perpendiculaires.

AUTRE SOLUTION

Par M. R. B.

Soient (Q) la quadrique de révolution, X son axe, D et Δ les deux droites. Appelons G et Γ les deux droites qui rencontrent X, D, Δ et la droite de l'infini du plan équatorial de (Q). La conjuguée de G doit rencontrer les conjuguées de ces quatre droites, c'est-à-dire les quatre droites elles-mêmes, prises dans un autre ordre : cette conjuguée est donc Γ. On voit ainsi que les droites G et Γ, qui rencontrent X à angle droit, sont aussi rectangulaires entre elles.

De là résulte que l'hyperboloïde (H) défini dans l'énoncé renferme trois droites rectangulaires deux à deux : cela établit la proposition énoncée.

Remarque. — Soit ABA'B' un quadrilatère gauche tracé sur (Q), AB, A'B' étant deux génératrices d'un système, BA', B'A deux génératrices de l'autre système. L'une des bissectrices de l'angle B'AB rencontre X; l'autre, α, est parallèle au plan équatorial (Π) de (Q). Soient β, α', β' les trois bissectrices analogues des autres angles du quadrilatère ABB'A'.

Les quatre droites α, β, α', β' *sont sur un paraboloïde* (P), *dont* (Π) *est un plan directeur*. En effet, elles sont toutes parallèles à (Π) et elles rencontrent toutes les deux diagonales AA', BB' du quadrilatère. Je supposerai, pour simplifier le langage, que (Π) est un plan horizontal.

Les plans tangents menés à (P) *par* X *sont rectangulaires.* En effet, ils sont déterminés par X et par les deux génératrices horizontales de P qui rencontrent cette droite : il est visible que ces deux génératrices ne sont autres que les droites G et Γ dont il a été question plus haut; elles sont donc rectangulaires, ce qui établit bien la proposition.

Considérons alors le contour apparent du paraboloïde (P), projeté horizontalement sur (Π). Ce contour apparent est une parabole qui touche les projections des quatre droites α, β, α', β', et dont la directrice passe par le pied de l'axe X sur (Π). *On obtient ainsi le théorème qui a fait l'objet de*

la question **2002**, et dont M. Retali a donné une élégante démonstration directe (même Tome, p. 95).

Autres solutions par MM. G. Painvin et Troin.

QUESTIONS.

2016. Si l'on considère toutes les loxodromies passant en un point M d'une sphère et si, pour chacune d'elles, on prend le centre de courbure correspondant au point M, le lieu de ces centres de courbure est un cercle situé dans le méridien perpendiculaire à celui du point M. (M. d'Ocagne.)

2017. Si une cubique gauche et une quadrique admettent un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique, on sait qu'elles en admettent une infinité. Démontrer que le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une cubique gauche. (G. Fontené.)

2018. Soit $P^{(m)}$ une parabole générale d'ordre m

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m.$$

Si, sur la parabole $P^{(2n)}$, on prend les points $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ dont les abscisses croissent en progression arithmétique et si l'on fait passer par ces points une $P^{(2n+1)}$ quelconque, l'aire comprise entre ces deux courbes depuis le point A_0 jusqu'au point A_{2n} est algébriquement nulle. (M. d'Ocagne.)

ERRATA.

Page 160, sixième ligne, *au lieu de :* Sur la déformation..., *il faut :* Sur la définition....

Page 163, sixième ligne, *au lieu de :* $\frac{u_0}{AM_0} + \frac{v_0}{BN_0} = 1$, *il faut :* $\frac{u_0}{AM_0} = \frac{v_0}{BN_0} = 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

Mai 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.
(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

JUIN 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[K2a et b]

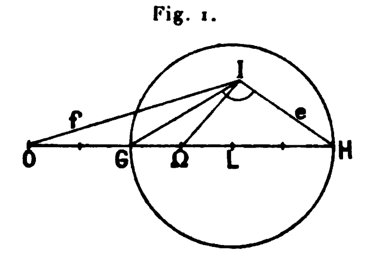
DISCUSSION D'UN TRIANGLE DONNÉ PAR LES POINTS REMARQUABLES O, I, H;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Un triangle ABC est déterminé quand on connaît le centre O du cercle circonscrit (*fig.* 1), le point de

Fig. 1.



concours des hauteurs H, le centre I d'un cercle tangent aux trois côtés, *cercle inscrit ou cercle ex-inscrit.* Au moyen des formules

$$(1) \qquad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr = 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) \qquad \text{(EULER)},$$

$$(2) \qquad \Omega I = \frac{R}{2} - r \qquad \text{(FEUERBACH)},$$

dans lesquelles r est négatif s'il s'agit d'un cercle ex-inscrit, on a d'abord

$$2R = \frac{\overline{OI}^2}{\Omega I};$$

on peut donc tracer le cercle circonscrit, le cercle des neuf points, et par suite le cercle I. Le triangle ABC

doit en outre être circonscrit à une conique de foyers O et H, admettant pour cercle directeur le cercle circonscrit. Si cette conique et le cercle I ont quatre tangentes communes, trois de ces tangentes portent les côtés du triangle; la quatrième n'est pas à considérer. Le problème ne peut avoir qu'une solution; il est du troisième degré.

2. En supposant que le triangle existe, on a ceci :

Le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, *ou le centre d'un cercle ex-inscrit, selon que ce point est intérieur ou extérieur au cercle décrit sur* GH *comme diamètre, ou encore selon que l'angle* GIH *est obtus ou aigu.*

On a en effet

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{\Omega I}^2} = \frac{2R}{\frac{R}{2} - r},$$

et r sera positif si l'on a $\frac{OI}{\Omega I} > 2$; or, le lieu des points pour lesquels ce rapport est égal à 2 est le cercle décrit sur GH comme diamètre; donc....

On peut d'ailleurs appliquer le théorème de Stewart aux trois obliques IO, IΩ, IL, le point L étant le milieu de GH, ce qui donne

$$\overline{IO}^2 + 3\overline{IL}^2 - 4\overline{I\Omega}^2 = 12\,\overline{\Omega L}^2 = 3\overline{GL}^2$$

ou

$$R(R-2r) - (R-2r)^2 = 3\left(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2\right)$$

ou

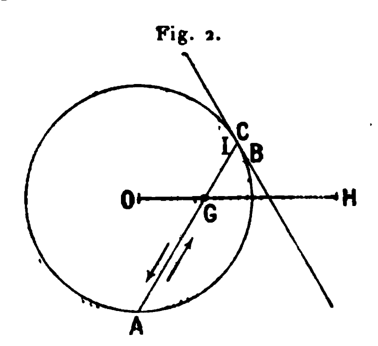
$$2r(R-2r) = 3\left(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2\right);$$

r sera positif si l'on a

$$LI < LG.$$

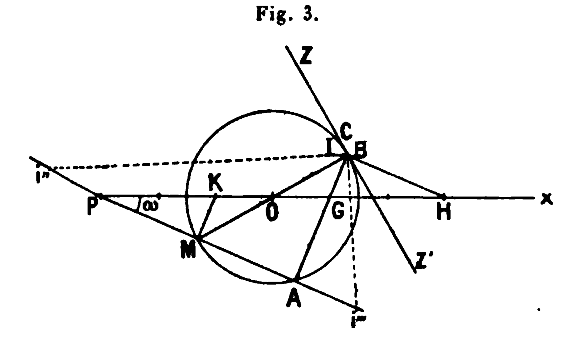
Lorsque l'angle GIH est droit, on a $r = 0$; ce cas singulier forme transition entre celui de la figure 5 et celui de la figure 6 : l'angle A est alors nul, ainsi que le côté BC (*fig.* 2). La vérification directe est facile.

Fig. 2.



3. Les points O et H étant donnés, le point I variant, chacun des triangles ABC que l'on obtient est obtenu quatre fois, le point donné I pouvant être le centre i du cercle inscrit, ou le centre d'un cercle ex-inscrit, i', i'' ou i''' (*fig.* 3). Chacun de ces triangles correspond à

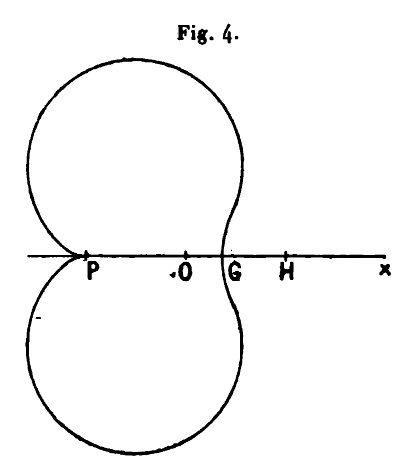
Fig. 3.



une position du point I à l'intérieur du cercle décrit sur GH comme diamètre, et l'on verra par le calcul que le point I peut être quelconque dans ce cercle.

Si le point I est donné sur la circonférence même de ce cercle l'angle A et le côté BC devenant nuls, les points i et i' sont confondus en I, tandis que les points i'' et i''' viennent occuper des positions limites; ces positions limites se trouvent sur la perpendiculaire menée du point A à la droite AI, *perpendiculaire qui passe constamment par le point* P *symétrique de* H *par rapport à* O, et sur les bissectrices des angles AIz, AIz'. Le cercle O, circonscrit au triangle ABC, passant au milieu de $i''i'''$, le milieu M du segment PA est aussi le milieu de $i''i'''$, et IM est la médiane du triangle rectangle I$i''i'''$, comme on peut d'ailleurs le voir directement. De là une construction simple de la courbe qui est le lieu des points limites i'' et i'''; *ayant décrit deux circonférences sur* PK *et sur* GH *comme diamètres, on mène les parallèles variables* PM *et* HI, *et l'on rabat* MI *en* Mi'' *et en* Mi'''; on obtient la courbe de la figure 4,

Fig. 4.



le point P est un point de rebroussement, et la courbe passe au point G.

Avec des coordonnées polaires du pôle P, comme

on a

$$\overline{Pi'' + Pi'''} = 2\overline{PM}, \qquad \overline{Pi''} \times \overline{Pi'''} = -\overline{AI}^2,$$

l'équation de la courbe est, en posant $OH = k$,

$$(3) \qquad \rho^2 - \frac{4k}{3}\rho\cos\omega - 4k^2\sin^2\omega = 0;$$

l'expression de ρ en fonction de ω traduit naturellement la construction ci-dessus

$$\rho = PM \pm MI.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes montre que la courbe est une quartique admettant pour points doubles les points cycliques.

Au paragraphe II, l'équation se présentera sous la forme

$$3\rho^4 - 4\rho^2 kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0,$$

qui peut donner les limites de x, et celles de ρ; je dirai seulement que les points de contact de la tangente double voisine de G sont les derniers sommets des deux triangles équilatéraux construits sur OH.

4. Les points O et H étant donnés, la courbe en question limite la région du plan à l'intérieur de laquelle le point I ne doit pas être donné pour que le triangle ABC existe.

Ce fait, que nous démontrerons rigoureusement, se comprend assez bien d'après ce qui précède; si l'on fait varier le point I, lorsque ce point franchit la circonférence décrite sur GH comme diamètre, les points i et i' s'échangent, on retrouve les mêmes triangles ABC, et les points i'', i''' reprennent les positions qu'ils occupaient; après s'être approchés de la courbe limite, ils s'en écartent.

II.

5. Euler a formé l'équation du troisième degré qui a pour racines les longueurs des côtés du triangle ABC, en prenant comme données les longueurs

$$IH = e, \qquad IO = f, \qquad OH = k,$$

le point I étant le centre du cercle inscrit. Je me propose de *discuter* le problème en me plaçant dans le cas général où le point I est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle.

6. Conformément aux figures 5 et 6, le plan étant

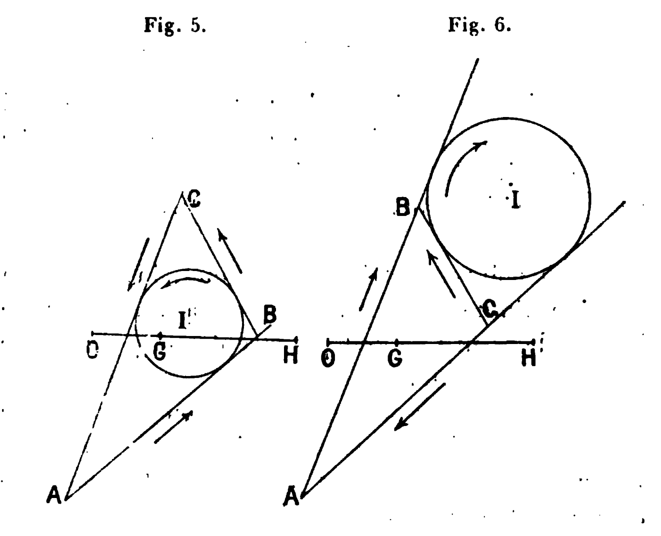


Fig. 5. Fig. 6.

orienté par la flèche φ, nous désignerons par r le rayon du cercle I affecté du signe + ou du signe — selon qu'il s'agira d'un cercle inscrit ou d'un cercle ex-inscrit; on aura donc les formules (1) et (2). Les axes qui por-

tent les côtés du triangle étant dirigés comme tangentes au cercle I, nous poserons

$$a = \overline{BC}, \qquad b = \overline{CA}, \qquad c = \overline{AB},$$

de sorte que, dans le cas de la figure 6, a sera négatif.

Avec $2p = a + b + c$, on aura toujours

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$
$$S = pr, \qquad abc = 4RS,$$

S ayant un signe déterminé par le sens de circulation ABC.

Nous poserons encore

$$s = a + b + c,$$
$$t = bc + ca + ab,$$
$$u = abc,$$

de sorte que a, b, c seront racines de l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0.$$

7. On a, entre les trois inconnues principales s, t, u, et les deux inconnues auxiliaires R, r, les cinq équations suivantes :

$$(4) \qquad R^2 - 2Rr = f^2 \qquad \text{ou} \qquad 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) = f^2,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = \frac{2e^2 + 2f^2 - k^2}{4},$$

$$(6) \qquad s^2 - 2t = 9R^2 - k^2;$$

$$(7) \qquad t - \frac{s^2}{4} = r^2 + 4Rr,$$

$$(8) \qquad u = 2Rr \times s.$$

Les équations (4) et (5) sont données par les formules (1) et (2). On a (8) en écrivant

$$abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr \times s.$$

L'équation (6) se tire de la formule barycentrique

$$\sum \overline{MA}^2 = 3\overline{MG}^2 + \frac{\Sigma a^2}{3},$$

en mettant M en O. On obtient (7) en écrivant

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ &= \frac{p^3 - 2p^3 + p\Sigma ab - 4Rrp}{p} \\ &= -p^2 + \Sigma ab - 4Rr. \end{aligned}$$

8. Les équations (4) et (5) donnent

$$(9) \qquad R^2 = \frac{f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(10) \qquad 2Rr = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(11) \qquad 4r^2 = \frac{(k^2 - 2e^2 - f^2)^2}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

Les équations (6) et (7) donnent

$$\begin{aligned} s^2 &= 18R^2 - 2k^2 + 4r^2 + 16Rr, \\ 2t &= 9R^2 - k^2 + 4r^2 + 16Rr; \end{aligned}$$

on en déduit, en ordonnant par rapport à k,

$$(12) \quad s^2 = \frac{3k^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(13) \quad t = \frac{k^4 - 3k^2e^2 + 2k^2f^2 + 2e^4 - 6e^2f^2 + f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

On a d'ailleurs

$$(14) \qquad u = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2}s.$$

[La formule (12) est reproduite dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 85, avec f^4 au lieu de $11f^4$;

à la page 84, ligne 13 et 15, on a mis également f^4 au lieu de $27 f^4$ et p^2 au lieu de ρ^2.]

9. On connait donc s, t, u, et l'on peut calculer a, b, c. Pour la discussion, il faut observer que, si l'on trouve a, b, c réels, comme r^2 est positif d'après (11), on a

$$p(p-a)(p-b)(p-c) > 0,$$

de sorte que l'existence du triangle ABC est alors assurée. Les conditions requises sont donc :

1° Que s^2 soit positif ou nul;

2° Que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles.

10. Supposons pour un instant la première condition remplie.

Pour écrire que l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0$$

a ses racines réelles, on écrit que le résultant des deux équations

$$3x^2 - 2sx + t = 0.$$
$$sx^2 - 2tx + 3u = 0$$

est négatif ou nul.

En posant

$$\Delta = 3t - s^2, \qquad \Delta' = 3su - t^2, \qquad \Theta = 9u - st,$$

on a la condition

$$(15) \qquad \Theta^2 - 4\Delta\Delta' \leqq 0.$$

On trouve, après suppression du facteur

$$2e^2 + 2f^2 - k^2$$

aux deux termes de chacune des trois fractions obtenues,

$$(16)\qquad \Delta = e^2 - 4f^2,$$

$$(17)\qquad \Theta = s(k^2 - e^2 - 5f^2),$$

$$(18)\qquad \Delta' = \frac{\left\{\begin{array}{l} k^6 - k^4(4e^2 + 3f^2) + k^2(5e^4 + 4e^2f^2 + 3f^4) \\ \quad - 2e^6 + 2e^4f^2 + 8e^2f^4 - 17f^6 \end{array}\right\}}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

11. Le premier membre de la condition (15) est donc du huitième degré par rapport aux quantités e, f, k : *des considérations géométriques vont nous permettre de lui donner une forme simple.* Lorsque le point I est sur la droite OH, le triangle ABC est isoscèle, I étant le centre du cercle inscrit, ou du cercle ex-inscrit dans l'angle compris entre les côtés égaux; on a, par exemple,

$$\overline{CA} = \overline{AB} \quad \text{ou} \quad b = c,$$

et l'équation du troisième degré a alors deux racines égales; le premier membre de la condition (15) contient donc en facteur l'expression

$$k^4 - 2k^2(e^2 + f^2) + e^4 - 2e^2f^2 + f^4,$$

qui représente $-16T^2$, T étant l'aire du triangle OIH.

Ce premier membre contient également le facteur

$$k^2 - 2e^2 - f^2;$$

en effet, quand cette expression est nulle (ce qui arrive si l'on a LI = LG) on a $r = 0$ d'après (10), et par suite $u = 0$; on a donc, par exemple, $a = 0$, $b = c$ (*fig.* 2), et l'équation du troisième degré a encore deux racines égales.

La condition (15) est alors de la forme

$$(k^4 + e^4 + f^4)(k^2 - 2e^2 - f^2)(\alpha k^2 + \beta e^2 + \gamma f^2) \leqq 0,$$

α, β, γ sont des nombres. On détermine ces nombres par les termes en k^8, e^8, f^8, et l'on a finalement

$$-16T^2 \times (k^2 - 2e^2 - f^2)^2 \leqq 0,$$

condition remplie d'elle-même. Ainsi, *pourvu que s soit réel, le triangle* ABC *existe.*

12. On a donc la seule condition

$$4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 3k^4 \geqq 0.$$

Les points O et H sont supposés fixes, le point I étant variable, la région possible pour ce point est limitée par une certaine courbe. Avec des axes de coordonnées rectangulaires, dont l'origine est par exemple au milieu de OH (*fig.* 4), on trouve que la courbe a un point de rebroussement au point P qui est le symétrique de H par rapport à O.

Mettant alors l'origine des coordonnées au point P, et posant PM $= \rho$, on a pour l'équation de la courbe en coordonnées x et ρ :

$$\begin{aligned}&4(\rho^2 - 4kx + 4k^2)^2\\&\quad -12(\rho^2 - 4kx + 4k^2)(\rho^2 - 2kx + k^2)\\&\quad +11(\rho^2 - 2kx + k^2)^2 - 8k^2(\rho^2 - 4kx + 4k^2)\\&\qquad\qquad + 2k^2(\rho^2 - 2kx + k^2) + 3k^4 = 0\end{aligned}$$

ou

$$3\rho^4 - 4\rho^2kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0;$$

la courbe est bien celle que l'on a obtenue au paragraphe I.

Le point I doit être extérieur à cette courbe, puisque le premier membre de l'équation précédente doit être positif.

Lorsque le point I est sur la courbe limite, on a

$$s = 0,$$

par suite

$$u = 0,$$

c'est-à-dire, par exemple,

$$b = 0, \qquad a + c = 0;$$

l'angle B de la figure 6 devient nul.

III.

13. Le triangle obtenu ABC peut être isoscèle, le cercle I étant ex-inscrit dans l'un des angles à la base; on a alors, par exemple, $\overline{BA} = \overline{BC}$ (*fig.* 6), où $c + a = 0$.

La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(a + b + c)(bc + ca + ab) = abc \qquad \text{ou} \qquad st = u,$$

ce qui donne

$$t = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

et ensuite

$$k^4 - k^2(3e^2 - f^2) + 2(e^2 - f^2)^2 = 0.$$

On trouve que le point I doit être sur une hyperbole ayant ses sommets aux points O et G, et dont les asymptotes font avec OG des angles de 60°; cette hyperbole rencontre la courbe de la figure 4 en deux points dont les ordonnées ont leurs pieds en P, et la partie de l'hyperbole intérieure à la courbe limite est naturellement à rejeter.

[C2a]

INTÉGRATION DES FONCTIONS INVERSES;

PAR M. C.-A. LAISANT.

On sait que si l'équation $y = f(x)$, résolue par rapport à x, donne

$$x = \varphi(y),$$

les deux fonctions f et φ sont appelées deux fonctions *inverses*. Presque tous les traités d'Algèbre ou d'Analyse donnent la dérivée d'une fonction inverse d'une autre.

Par contre, je n'ai trouvé nulle part l'exposé d'une règle permettant d'obtenir l'intégrale

$$\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x)$$

dès l'instant où l'on sait déterminer

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x).$$

La question est d'une telle simplicité, cependant, que j'ai peine à croire nouvelle la règle que je me propose d'indiquer ici. Mais, déjà connue ou non, elle n'est pas répandue dans l'enseignement, où elle serait de nature à rendre les plus sérieux services. C'est donc surtout aux professeurs que je m'adresse, et je crois mon appel particulièrement opportun, à l'heure où les éléments du Calcul infinitésimal viennent d'être enfin introduits dans le programme de la classe de Mathématiques spéciales en France.

Avec les notations qui précèdent, la règle dont il s'agit se résume en l'identité suivante

$$\Phi(x) = x\varphi(x) - F[\varphi(x)], \tag{1}$$

qui peut aussi s'écrire symboliquement

$$\Phi = (x - F)\varphi.$$

On la vérifie immédiatement en prenant les dérivées des deux membres, et en se rappelant que

$$f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)] = x;$$

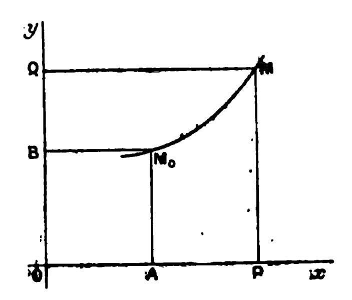
car on obtient ainsi

$$\Phi'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) - F'[\varphi(x)]\varphi'(x);$$

mais $\Phi' = \varphi$, $F' = f$; en sorte qu'on a

$$\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) - x\varphi'(x).$$

Je suis arrivé à cette règle, traduite par l'identité (1),



par la considération géométrique de l'aire qui correspond à une intégrale définie. Si une courbe (M) a pour équation $y = f(x)$, son équation est aussi $x = \varphi(y)$. Alors les coordonnées de deux points M_0 et M étant

respectivement (a, b) et (x, y) on a

$$M_0APM = \int_a^x f(x)\,dx, \qquad M_0MQB = \int_b^y \varphi(y)\,dy,$$

$$M_0APM + M_0MQB = OPMQ - OAM_0B = xy - ab,$$

ou, avec les notations précédentes,

$$F(x) - F(a) + \Phi(y) - \Phi(b) = xy - ab.$$

Comme $x = \varphi(y)$, $a = \varphi(b)$, on peut encore écrire

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(y) - y\,\varphi(y) + F[\varphi(y)] \\ \quad = \Phi(b) - b\,\varphi(b) + F[\varphi(b)], \end{array} \right.$$

relation qui devient identique avec (1) si l'on remplace y par x et si l'on considère des intégrales indéfinies au lieu d'intégrales définies.

Naturellement, on a aussi l'identité réciproque

(3) $$F(x) = x f(x) - \Phi[f(x)]$$

ou, symboliquement,

$$F = (x - \Phi) f.$$

On obtient d'ailleurs cette identité (3) en remplaçant dans (1) x par $f(x)$.

Au fond, tout ceci dérive de la formule qui donne la différentielle du produit xy,

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx,$$

ou, ce qui revient au même, de l'intégration par parties de $f(x)\,dx$, en séparant simplement dx comme différentielle exacte, car on a ainsi

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x\,d f(x) = x f(x) - \int \varphi(y)\,dy$$

si l'on a posé $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$. Et l'on tire de là

$$F(x) = xf(x) - \Phi(x) = xf(x) - \Phi[f(x)],$$

c'est-à-dire l'identité (3).

Le grand avantage de la règle indiquée consiste, chaque fois que la fonction inverse φ est explicitement connue, dans la possibilité d'écrire immédiatement l'intégrale Φ, sans aucun calcul préalable, si l'on connait celle, F, qui correspond à la fonction directe f. Nous allons en donner quelques exemples :

1° On sait que l'intégrale de $e^x\,dx$ est e^x. De là on déduira immédiatement celle de $\mathrm{L}x\,dx$. Ici

$$f(x) = e^x, \qquad \varphi(x) = \mathrm{L}x, \qquad F(x) = e^x.$$

Donc, en appliquant l'identité (1)

$$\Phi(x) = \int \mathrm{L}x\,dx = x\,\mathrm{L}x - e^{\mathrm{L}x} = x\,\mathrm{L}x - x = x(\mathrm{L}x - 1).$$

2° Soit

$$f(x) = \sin x, \qquad \varphi(x) = \arcsin x, \qquad F(x) = -\cos x.$$

On aura

$$\Phi(x) = \int \arcsin x\,dx$$
$$= x \arcsin x + \cos(\arcsin x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

3° Soit

$$f(x) = \operatorname{tang} x, \qquad \varphi(x) = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad F(x) = -\mathrm{L}\cos x.$$

Alors

$$\Phi(x) = \int \operatorname{arc\,tang} x\,dx = x \operatorname{arc\,tang} x + \mathrm{L}\cos(\operatorname{arc\,tang} x)$$
$$= x \operatorname{arc\,tang} x + \mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$= x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1 + x^2).$$

4° Si $y = f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$, et si l'équation $f(x) - y = 0$ est algébriquement résoluble, soit $\alpha = \varphi(y)$ l'expression qui donne l'une des racines. On aura

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx$$
$$= x\varphi(x) - \left(\frac{a_0}{m+1}[\varphi(x)]^{m+1} + \frac{a_1}{m}[\varphi(x)]^m + \ldots + a_m\varphi(x)\right).$$

L'introduction de cette règle d'intégration dans l'enseignement me paraît, j'y insiste, profondément désirable.

[K2c]

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PREMIÈRE DÉMONSTRATION PAR M. CANON.

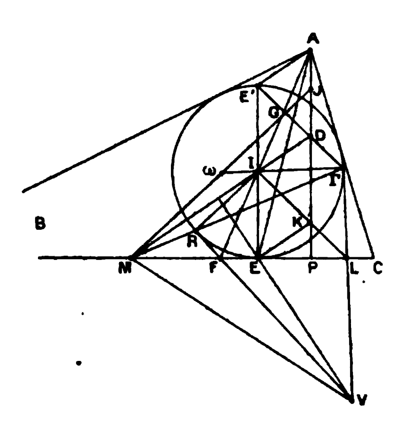
Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Pour établir le théorème de Feuerbach, soit par inversion, ou autrement, on a fait usage d'une relation bien connue. Je me suis proposé de trouver une démonstration de ce théorème indépendante de cette relation. C'est cette démonstration que je viens exposer aujourd'hui.

Prenons le triangle ABC. Appelons M le milieu de BC et E le point où ce côté est touché par le cercle inscrit. Le point I étant le centre de ce cercle, menons le rayon IR, symétrique de IE par rapport à la bissec-

trice AIF, et la droite MR qui coupe en Γ le cercle inscrit.

La tangente en R au cercle inscrit contient F et coupe au point V la tangente au point Γ. La droite VE, étant la polaire de M par rapport au cercle inscrit, les droites VM, VFR, VE, VLΓ forment un faisceau harmonique et, par suite, les points M, F, E, L forment une division harmonique. Les droites issues de I, qui passent par ces points, forment un faisceau harmonique



dont les rayons rencontrent la droite ΓE', qui joint Γ au point E' diamétralement opposé à E, aux points E', G, D et à l'infini (1). Le point G est alors le milieu de E'D; il résulte de là, puisque E'A est parallèle à MID (2), que AD est parallèle à E'I et alors perpendiculaire à BC.

Appelons K le point où la hauteur ADP rencontre IL, la droite EK est parallèle à MID. Les triangles ho-

---

(1) La droite E'Γ est parallèle à IL parce que cette dernière droite est la bissectrice de l'angle EIΓ.

(2) On sait, d'après un théorème de Newton, que MID passe par le milieu du segment AE et alors E'A est parallèle à ID.

mothétiques MIE, EKP et leur centre d'homothétie donnent

$$\frac{LM}{LE} = \frac{LE}{LP},$$

ou, en remplaçant LE par son égal L Γ,

$$\frac{LM}{L\Gamma} = \frac{L\Gamma}{LP}.$$

Il résulte de là qu'*il y a un cercle qui passe par* M, P *et qui est tangent en* Γ *au cercle inscrit.*

Son centre ω est à la rencontre de ΓI et de la parallèle Mω à RI, c'est-à-dire qu'en prolongeant Mω jusqu'au point J de la hauteur AP, le segment MJ est le diamètre de ce cercle. Ce diamètre, étant parallèle à RI, fait avec la bissectrice AI le même angle que AP, c'est alors le diamètre du cercle des neuf points.

On voit donc que *le cercle auquel nous sommes arrivé est le cercle des neuf points du triangle* et alors que *ce dernier cercle est tangent en* Γ *au cercle inscrit.*

Remarques. — Le point de contact Γ s'obtient à la rencontre du cercle inscrit et de la droite MR, il est aussi à la rencontre de ce cercle et de la droite qui joint le point E', au milieu G de IA. Dans ces deux cas le cercle doit être tracé.

Lorsque le cercle n'est pas tracé, voici comment on obtient Γ :

On détermine K à la rencontre de AP et de la parallèle EK à MI, le point Γ est le symétrique de E par rapport à IK.

J'ai déjà eu l'occasion de donner ces diverses constructions du point Γ.

Deuxième démonstration par M. G. FONTENÉ.

Étant donné un quadrangle ABCD, on sait que les cercles des neuf points des quatre triangles auxquels il donne lieu ont un point commun P. En outre, le cercle circonscrit au triangle podaire du point D relativement au triangle ABC, par exemple, passe au point P.

Cela posé, soient un triangle ABC, et deux points D et D′ inverses l'un de l'autre par rapport à ce triangle. Les deux triangles podaires ont même cercle circonscrit et celui-ci coupe le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points P et P′ qui se *séparent :* l'un est le point commun aux cercles des neuf points des triangles DBC, DCA, DAB, l'autre est le point commun aux cercles des neuf points des triangles D′BC, ... Si maintenant D est le centre d'un cercle (D) tangent aux trois côtés du triangle ABC, ce point coïncide avec son inverse, les points P et P′ se confondent, et l'on voit que le cercle (D) est tangent au cercle des neuf points du triangle.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1905.

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE;

Solution par M. Jean SERVAIS.

I. *Démontrer que l'égalité*

$$\sin B = \frac{1}{3}\sin(2A + B)$$

entraîne la suivante :

$$\operatorname{tang}(A + B) = \frac{3}{2}\operatorname{tang} A.$$

II. *Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près (on ne supposera pas connue la valeur du nombre e).*

III. 1° *Trouver une série S ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable x, et telle qu'on ait identiquement la relation :*

$$x(1+x)[2+(2-p)x]S''$$
$$-[(p^2-p-2)x^2-4x-2]S'+2p[1+(2-p)x]S=0,$$

S′ désignant la série des dérivées premières, et S″ la série des dérivées secondes des termes de la série S.

2° *Étudier les conditions de convergence des séries S ainsi obtenues.*

3° *Examiner en particulier les solutions qui s'annulent pour $x = 0$.*

4° *Qu'arrive-t-il si p est un nombre entier et positif?*

N.-B. — *Les candidats pourront commencer par traiter les cas les plus simples où p a l'une des valeurs :* 1, 2, *ou* — 1.

La question I ne présente aucune difficulté; il suffit d'écrire l'égalité proposée sous la forme

$$\sin[(A+B)-A] = \frac{1}{5}\sin[(A+B)+A]$$

et de développer les deux membres.

La question II est un exercice de calcul facile.

Pour résoudre la question III, posons

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle de convergence, S se comporte comme un polynome entier. En portant S et ses dérivées S′ et S″ dans l'équation différentielle, et en égalant à zéro le terme constant;

les coefficients de x, x^2, x^3, ..., x^n, on obtient, toutes réductions faites, les égalités suivantes :

$$pa_0 - a_1 = 0,$$
$$2(2-p)(pa_0 - a_1) = 0,$$
$$6a_3 - (p-1)(p-2)a_1 = 0,$$
$$16a_4 - 4(p-3)a_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2(n+1)(n-1)a_{n+1} - (n-2)[p(n+1) - 4n]a_n$$
$$+ (n-3)[p^2 - p(n+1) + 2(n-1)]a_{n-1} = 0.$$

Les deux premières relations se réduisent à une et donnent

$$a_1 = pa_0.$$

Les deux suivantes donnent ensuite

$$a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}a_0,$$
$$a_4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}a_0.$$

On voit apparaître la loi. L'expression de a_n est vraisemblablement

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}a_0.$$

Pour montrer que c'est exact, il suffit de prouver que, si cette loi est vraie jusqu'à l'indice n, elle est encore vraie pour l'indice $n+1$, ce qui se vérifie au moyen de la relation générale entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}.

Tous les coefficients du développement sont déterminés en fonction de a_0, sauf le coefficient de x^2 qui reste arbitraire.

On voit alors que la série S est le développement de

$$S = a(1+x)^p + bx^2,$$

a et b étant arbitraires.

La série est alors, d'après des résultats bien connus, convergente pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

La solution qui s'annule pour $x = 0$ est celle obtenue en faisant $a = 0$, c'est-à-dire

$$S = bx^2.$$

Enfin pour p entier positif le développement est limité au terme en x^p.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère deux cônes* (S)

Fig. 1.

et (T), *se coupant à angle droit suivant* Oz *et dont les sommets* S *et* T *sont situés sur la partie* POSITIVE *de* Oz, *de façon que*

$$OS = \gamma, \qquad OT = \gamma' \quad (\gamma' > \gamma):$$

leurs bases dans le plan Oxy *sont des circonférences*

dont les centres et les rayons sont A *et* a *pour* (S) *et* B *et* b *pour* (T) (A *sur* Ox, B *sur* Oy).

Les deux cônes ont ainsi en commun, outre l'axe Oz, *une courbe* (Γ).

1° *Former l'équation de la cubique* (C) *projection de* (Γ) *sur le plan* xOy, *et construire cette cubique.*

2° *Soit* PQ *une corde quelconque de* (Γ) [*obtenue, par exemple, en la considérant comme située sur une génératrice* (G) *d'un hyperboloïde passant par l'intersection* COMPLÈTE *des cônes* (S) *et* (T)]; *soit* pq *la projection de* PQ *sur le plan* xOy : *cette projection rencontre la cubique* (C), *outre les points* p *et* q, *en un troisième point* m.

On demande le lieu de la droite PQ *dans les cas suivants :*

I. *Le point* m *est fixe.*

II. *Les droites* Op *et* Oq *font des angles égaux avec* Ox.

III. *La corde* pq *est vue de l'origine suivant un angle droit. Généraliser.*

Les équations des deux cônes (S) et (T) sont

$$\text{(S)} \qquad \gamma(x^2+y^2)-2ax(\gamma-z)=0,$$

$$\text{(T)} \qquad \gamma'(x^2+y^2)-2by(\gamma'-z)=0.$$

En éliminant z, on a l'équation de la strophoïde

$$\text{(C)} \qquad (\gamma' ax-\gamma by)(x^2+y^2)-2ab(\gamma'-\gamma)xy=0.$$

Pour la construire coupons-la par une droite passant par le point double à l'origine

$$y=tx$$

et nous avons

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2ab(\gamma' - \gamma)t}{(\gamma' a - \gamma b t)(1 + t^2)}, \\ y = \dfrac{2ab(\gamma' - \gamma)t^2}{(\gamma' a - \gamma b t)(1 + t^2)}. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de la direction asymptotique est

$$t = \frac{\gamma' a}{\gamma b};$$

l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est la limite de la différence

$$y - \frac{\gamma' a}{\gamma b} x = \frac{-2ab(\gamma' - \gamma)t}{\gamma b(1 + t^2)},$$

lorsque t tend vers $\frac{\gamma' a}{\gamma b}$. L'équation de l'asymptote est donc

$$\frac{y}{\gamma' a} - \frac{x}{\gamma b} + \frac{2ab(\gamma' - \gamma)}{\gamma^2 b^2 + \gamma'^2 a^2} = 0.$$

Cette asymptote coupe la courbe en un point à distance finie qui correspond à la valeur $t = \frac{\gamma b}{\gamma' a}$ du paramètre.

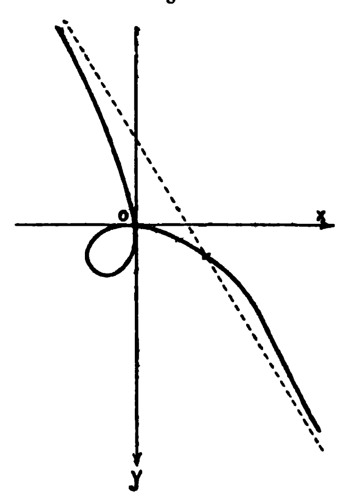
On est ainsi conduit à distinguer trois cas, suivant les positions relatives des deux valeurs $\frac{\gamma' a}{\gamma b}$ et $\frac{\gamma b}{\gamma' a}$.

1° Si $\gamma' a > \gamma b$, on a le Tableau suivant des valeurs de x et y :

t	$-\infty$		0		$\frac{\gamma b}{\gamma' a}$	$\frac{\gamma' a}{\gamma b}$			$+\infty$
x	0	$-$	0	$+$		$+\infty$ | $-\infty$		$-$	0
y	0	$+$	0	$+$		$+\infty$ | $-\infty$		$-$	0

et la forme de la courbe est celle de la figure 2.

Fig. 2.



2° Si $\gamma' a = \gamma b$, l'équation de la courbe se simplifie et devient

$$(x - y)(x^2 + y^2) - 2(b - a)xy = 0;$$

celle de l'asymptote est

$$y - x + b - a = 0.$$

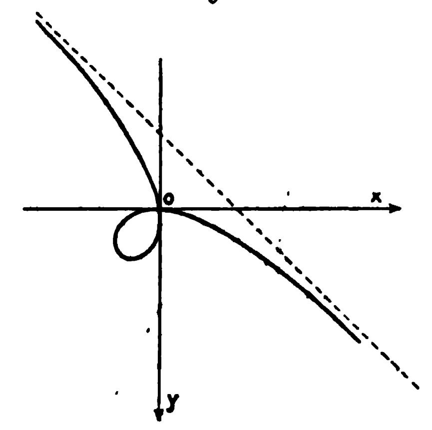
La courbe est une *strophoïde droite,* comme l'indique la figure 3.

3° Si $\gamma' a < \gamma b$, on a le Tableau :

t	$-\infty$		0		$\frac{\gamma' a}{\gamma b}$		$\frac{\gamma b}{\gamma' a}$	$+\infty$
x	0	$-$	0	$+\infty$		$-\infty$	$-$	0
y	0	$+$	0	$+\infty$		$-\infty$	$-$	0

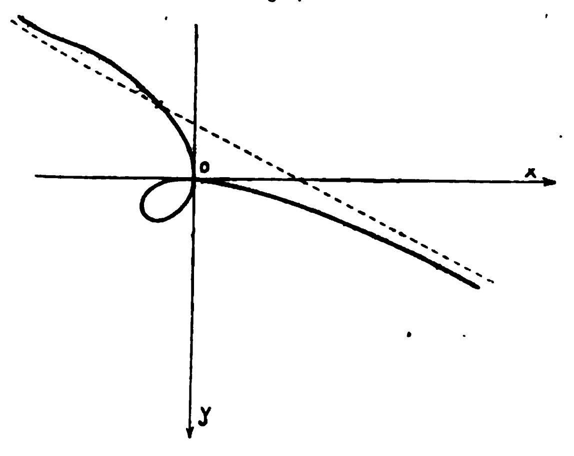
et la forme de la courbe est celle de la figure 4.

Fig. 3.



Pour traiter la seconde Partie, formons l'équation

Fig. 4.



d'un hyperboloïde (H) passant par l'intersection des deux cônes,

$$(\mathrm{H})\quad (\gamma+\lambda\gamma')(x^2+y^2)+2ax(\gamma-z)-2b\lambda y(\gamma'-z)=0.$$

Pour mettre les génératrices en évidence, écrivons cette équation sous la forme

$$x[(\gamma+\lambda\gamma')x-2a(\gamma-z)]+y[(\gamma+\lambda\gamma')y-2b\lambda(\gamma'-z)]=0.$$

Une corde PQ de la cubique est une génératrice (G) de même système que Oz. Ses équations sont donc

$$(2)\qquad \begin{cases}(\gamma+\lambda\gamma')y-2b\lambda(\gamma'-z)+\mu x=0,\\ (\gamma+\lambda\gamma')x-2a(\gamma-z)\quad-\mu y=0.\end{cases}$$

Elles représentent d'ailleurs les plans menés par PQ et respectivement les points T et S.

Faisons $z=0$ dans une de ces équations, la seconde par exemple; nous obtenons ainsi l'équation

$$(\gamma+\lambda\gamma')x-\mu y-2a\gamma=0,$$

qui représente la droite joignant les points de rencontre du cercle (A) et des rayons Op et Oq. Pour avoir les équations de ces rayons il suffit donc d'éliminer une variable d'homogénéité entre la dernière équation écrite et l'équation du cercle (A) dans le plan Oxy, ce qui donne

$$\gamma y^2+\mu xy-\lambda\gamma' x^2=0,$$

d'où l'équation aux coefficients angulaires de Op et Oq,

$$(3)\qquad \gamma t^2+\mu t-\lambda\gamma'=0.$$

La projection pq de la droite PQ sur le plan xOy s'obtient en éliminant z entre ces deux équations, ce qui donne

$$(4)\quad (\gamma+\lambda\gamma')(b\lambda x-ay)+2ab\lambda(\gamma'-\gamma)-\mu(ax+b\lambda y)=0.$$

Formons l'équation des droites qui joignent l'origine des coordonnées aux points d'intersection de la droite (D) et de la cubique (C); et nous obtenons, par

un calcul facile,

$$(5)\qquad (ax + b\lambda y)(\lambda\gamma' x^2 - \mu xy - \gamma y^2) = 0.$$

Cette équation du troisième degré en $\frac{y}{x}$ admet d'abord la racine $-\frac{a}{b\lambda}$ *indépendante de* μ; c'est le coefficient angulaire de la droite Om. En effet, l'hyperboloïde (H) correspondant à une valeur donnée de λ a une seconde génératrice mM parallèle à Oz. Toutes les droites PQ étant des génératrices de (H) de système différent de celui de mM rencontrent cette droite en un point qui se projette sur le plan xOy en un point m de la cubique (C) projection du point M de l'espace où la droite Mm rencontre la cubique gauche. Lorsque λ reste fixe, m reste fixe, le coefficient angulaire de la droite Om doit donc bien être indépendant de μ; c'est donc bien $-\frac{a}{b\lambda}$.

I. Ce raisonnement prouve, de plus, que, pour que le point m reste fixe, il faut et il suffit que λ soit constant (c'est-à-dire que la génératrice mM reste fixe) et la droite PQ engendre l'hyperboloïde (H) correspondant à la valeur λ du paramètre.

II. Les coefficients angulaires des droites Op et Oq sont racines de l'équation (3) obtenue en débarrassant (5) de la racine $-\frac{a}{b\lambda}$ et en posant $t = \frac{y}{x}$. Pour que Op et Oq fassent des angles égaux avec Ox, il faut et il suffit que cette équation (3) ait des racines opposées, c'est-à-dire que $\mu = 0$. La droite PQ a alors pour équation :

$$(6)\qquad \begin{cases} \gamma y + \lambda[\gamma' y - 2b(\gamma' - z)] = 0, \\ \gamma x - 2a(\gamma - z) + \lambda\gamma' x = 0; \end{cases}$$

et elle engendre le paraboloïde

$$\gamma\gamma' xy - [\gamma x - 2a(\gamma - z)][\gamma' y - 2b(\gamma' - z)] = 0$$

ou

$$a\gamma' y(\gamma - z) + b\gamma x(\gamma' - z) - 2ab(\gamma - z)(\gamma' - z) = 0,$$

qui admet comme plans directeurs les plans

$$z = 0 \qquad \text{et} \qquad a\gamma' y + b\gamma x + 2abz = 0.$$

III. Pour que l'angle pOq soit *droit*, il faut et il suffit que le produit des racines de l'équation (3) soit égal à -1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

On retrouve le cas I, le point m est fixe et la droite PQ engendre l'hyperboloïde

$$2\gamma\gamma'(x^2 + y^2) - 2a\gamma' x(\gamma' - z) - 2b\gamma y(\gamma' - z) = 0.$$

Les trois cas précédents sont des cas particuliers du cas plus général où les droites Op et Oq décrivent deux faisceaux en involution. Pour cela, il faut et il suffit que les racines t et t' de l'équation (3) vérifient une relation de la forme

$$\alpha tt' + \beta(t + t') + \delta = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha\gamma'\lambda + \beta\mu - \delta\mu = 0.$$

Le lieu de la droite PQ s'obtient alors en éliminant λ et μ entre cette relation et les équations (2), ce qui donne la quadrique

$$\begin{vmatrix} \gamma' y - 2b(\gamma' - z) & x & \gamma y \\ \gamma' x & -y & \gamma x - 2a(\gamma - z) \\ \alpha\gamma' & \beta & -\delta\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. V. JAMET.

Rappelons d'abord les propositions suivantes :

I. *Une cubique gauche ne peut couper une surface du second degré en plus de six points, à moins d'être contenue tout entière sur la surface.*

En effet, une cubique gauche étant définie par trois équations de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)}, \qquad z = \frac{f_3(t)}{\varphi(t)},$$

où l'on a désigné par f_1, f_2, f_3, φ, quatre polynomes entiers du troisième degré, l'équation qui fait connaître les valeurs de t correspondant aux points où elle coupe une surface du second degré, sera elle-même du sixième degré. Donc, de deux choses l'une : ou elle a six solutions, et six seulement, et la cubique a six points, et six seulement, situés sur la surface ; ou bien elle est vérifiée quel que soit t, et la cubique est située en entier sur la surface.

COROLLAIRE. — *Si une cubique gauche a sept points sur une surface du second degré, elle y est située tout entière.*

II. *Si une droite* Az *rencontre une cubique gauche en un point* A, *les cordes de la cubique qui s'appuient sur* Az *engendrent une surface du second degré.*

En effet, trois de ces cordes dont les extrémités sont, par exemple, M et N, P et Q, R et S, déterminent une surface du second degré Σ, qui contient la cubique tout entière ; car, outre les six points, M, N, P, Q,

R, S, cette surface contient la droite Az tout entière, et par conséquent un septième point de la cubique, le point A.

Mais chacune des droites dont nous cherchons le lieu géométrique est située en entier sur Σ, puisqu'elle a, sur cette surface, trois points, savoir : les deux points où elle s'appuie sur la cubique, et le point où elle coupe Az. Donc le lieu cherché est la surface Σ.

III. Si dans les équations (1) on donne à t, séparément, deux valeurs entre lesquelles il y a une relation involutive, elles déterminent, sur la courbe, deux points, M, N, qui, par définition, décrivent sur la courbe deux divisions en involution. Par exemple, les extrémités d'une corde de la cubique seront en involution, si cette corde est assujettie à rencontrer une droite fixe qui, comme dans le théorème précédent, s'appuie sur la cubique en un point fixe A. En effet, soit Az la droite fixe, et soit M un point mobile sur la cubique. Par ce point passe une corde MN, et une seule, qui s'appuie sur Az; son extrémité N est le troisième point d'intersection de la cubique avec le plan MAz; donc à toute position du point M répond une position, unique d'ailleurs, du point N, et inversement. D'ailleurs, les deux points s'échangent visiblement l'un dans l'autre, et ceci ne peut avoir lieu que s'il y a, entre les valeurs de t qui les déterminent, une relation involutive.

Réciproquement, *s'il y a involution entre deux points mobiles sur une cubique gauche, la droite qui les joint engendre une surface du second degré.*

En effet, soient, sur la cubique, (M, N), (P, Q), deux couples de points correspondants d'après l'involu-

tion donnée, A un point pris à volonté sur la cubique, Az une droite issue du point A et s'appuyant sur les deux droites MN, PQ. Une corde de la cubique, assujettie à s'appuyer sur Az, engendre une surface du second degré (II). Mais les extrémités de cette corde décrivent sur la cubique deux divisions en involution; et la correspondance entre ces deux points ne diffère pas de la correspondanee donnée, puisque, dans ces deux correspondances, il y a deux couples de points correspondants, savoir (M, N) et (P, Q), appartenant à l'une et à l'autre. Donc la surface du second degré, que nous venons de définir, coïncide avec le lieu cherché.

IV. Dans le sujet de concours il s'agissait d'une cubique gauche, intersection de deux cônes du second ordre, de sommets S et T, se coupant à angle droit suivant leur génératrice commune ST, et dont les bases sont des cercles situés dans un plan xOy, perpendiculaire à la droite ST. Ces deux cercles devront couper l'axe des z en un même point O. Leurs tangentes au point O sont les traces, sur le plan xOy, des plans tangents aux deux cônes suivant la droite ST, et la projection de la cubique commune aux deux cônes, sur le plan des xy, admettra nécessairement ces deux droites comme tangentes au point O. De plus, cette projection est une cubique circulaire, car, si l'on cherche à la déterminer par points (comme en Géométrie descriptive) en adoptant pour plans auxiliaires des plans horizontaux (parallèles à xOy), les sections faites dans les deux cônes par un tel plan sont des cercles, projetés horizontalement en vraie grandeur. Donc la courbe plane cherchée doit passer par les deux points communs à tous les cercles du plan xOy, c'est-à-dire par les deux ombilics du plan. En résumé, la projection cherchée

est une cubique circulaire ayant, au point O, deux tangentes rectangulaires Ox, Oy; c'est donc une strophoïde.

V. Dans la deuxième partie de la composition, on proposait de rechercher le lieu décrit par une corde PQ de la cubique, dans divers cas où les points P, Q sont en involution; par exemple (§ I du texte) dans le cas où la projection de la droite PQ sur le plan xOy coupe la strophoïde définie ci-dessus, en un troisième point M supposé fixe. Mais alors, la parallèle à Oz, menée par m, s'appuie sur la cubique en un point fixe M et la droite PQ coupe une droite fixe Mm s'appuyant elle-même sur la cubique. En pareil cas elle engendre une surface du second degré. Cette surface est un hyperboloïde; car, si le point M vient en S, le point N vient en T, et la surface a deux génératrices parallèles à distance finie, savoir ST et Mm.

On ramène immédiatement à ce cas celui où la projection pq de PQ, sur le plan xOy, est vue du point O sous un angle droit (§ III du texte). En effet, d'après les propriétés connues de la strophoïde, la droite pq coupe alors la strophoïde en un point fixe m tel que la droite Om et la direction asymptotique réelle de la strophoïde sont également inclinées sur les tangentes au point O. Le lieu géométrique de PQ est encore un hyperboloïde.

Si les droites Op, Oq font avec Ox des angles égaux (§ II du texte), on démontre aisément que la droite pq enveloppe une parabole, de telle sorte que le contour apparent de la surface cherchée est parabolique; et la surface elle-même est un paraboloïde.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE;

SOLUTIONS PAR M. JEAN SERVAIS.

Première composition de Mathématiques (Sciences I).

On considère les trois surfaces du second degré définies par les équations

$$y = x^2, \qquad z = xy, \qquad zx = y^2.$$

I. *Soit* M *le point d'intersection des plans polaires d'un point* M_0 *par rapport à ces trois surfaces : on demande d'exprimer les coordonnées* x, y, z *du point* M *au moyen des coordonnées* x_0, y_0, z_0 *du point* M_0 *et, inversement,* x_0, y_0, z_0 *au moyen de* x, y, z.

II. *Vérifier, sur les formules, que le point* M *n'est pas déterminé quand le point* M_0 *se trouve sur la courbe* (C) *définie par les équations*

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Où se trouve alors le point M?

III. *Pour que le point* M_0 *soit dans le plan des* x, y, *il faut que le point* M *soit sur une surface* (S) *du troisième degré. Vérifier que cette surface contient la courbe* (C) *et qu'elle est réglée. Quel est le lieu du point* M_0 *quand le point* M *décrit une génératrice rectiligne de la surface?*

IV. *Quel est, sur la surface* (S), *le lieu des points* M

tels que le point M_0 *soit rejeté à l'infini dans le plan des* x, y?

V. *Le point* M *est supposé se mouvoir sur la surface* (S), *de telle façon qu'il soit, à chaque instant* t, *sur la génératrice définie par les équations*

$$y = tz, \qquad x = \frac{2}{3}t^2 z + \frac{1}{3t}$$

et que son accélération soit située dans le plan tangent en M *à la surface. Montrer que la coordonnée* z *vérifie l'équation*

$$t\frac{d\frac{1}{z}}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

Intégrer cette équation et exprimer les trois coordonnées en fonction du temps. Vérifier que la courbe (C) *est l'une des trajectoires possibles.*

I. Les trois plans polaires du point M_0 ont pour équations

$$(1) \qquad \begin{cases} 2xx_0 - y - y_0 = 0, \\ xy_0 + yx_0 - z - z_0 = 0, \\ xz_0 - 2yy_0 + zx_0 = 0. \end{cases}$$

On obtient les coordonnées du point M en résolvant ces trois équations par rapport à x, y, z. Des deux premières, on peut toujours tirer y et z en fonction de x, ce qui donne

$$(2) \qquad \begin{cases} y = 2xx_0 - y_0, \\ z = xy_0 + 2xx_0^2 - x_0 y_0 - z_0. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$(3) \qquad (2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0)x - x_0^2 y_0 - x_0 z_0 + 2y_0^2 = 0.$$

De cette équation (3) on tire, en général, une valeur

bien déterminée pour x, et, en portant cette valeur dans les égalités (2), on obtient les expressions suivantes des coordonnées de M :

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x_0^2 y_0 + x_0 z_0 - 2y_0^2}{2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0}, \\ y = \dfrac{2x_0^2 z_0 - x_0 y_0^2 - y_0 z_0}{2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0}, \\ z = \dfrac{3x_0 y_0 z_0 - 2y_0^3 - z_0^2}{2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0}. \end{cases}$$

Comme les équations (1) ne changent pas lorsqu'on permute x et x_0, y et y_0, z et z_0, il suffit de faire cette permutation dans les formules (4) pour avoir les coordonnées x_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z.

II. La valeur de x donnée par l'équation (3) est indéterminée dans le cas particulier où l'on a simultanément

$$(5)\quad \begin{cases} 2x_0^3 - 3x_0 y_0 + z_0 = 0, \\ x_0^2 y_0 + x_0 z_0 - 2y_0^2 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire lorsque le point M_0 est à l'intersection des deux surfaces du troisième ordre définies par ces deux équations. Ces deux surfaces sont tangentes tout le long d'une cubique et ont, en outre, en commun la droite à l'infini du plan yOz qui compte trois fois, car c'est une droite double de la première surface, et les deux surfaces sont tangentes, suivant elle, au plan de l'infini.

L'élimination de z_0 entre les deux équations (5) donne

$$2(y_0 - x_0^2)^2 = 0,$$

et, en remplaçant y_0 par z_0^2 dans la première, on en déduit

$$z_0 = x_0^3.$$

Le point M est donc bien indéterminé lorsque le point M_0 est sur la cubique (C) :

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

L'équation (3) étant une identité, les trois équations (1) se réduisent aux deux équations (2) qui deviennent

$$(6) \qquad \begin{cases} y = 2xx_0 - x_0^2, \\ z = 3xx_0^2 - 2x_0^3. \end{cases}$$

Le point M est donc indéterminé sur la droite, représentée par les équations (2), qui est d'ailleurs la tangente en M_0 à la cubique (C).

Remarquons, en passant, que les tangentes à (C) engendrent une surface développable D du quatrième ordre dont l'équation est

$$(z - xy)^2 = 4(y - x^2)(xz - y^2).$$

Les quatre surfaces obtenues en égalant à zéro les numérateurs et le dénominateur de x, y et z passent évidemment par la cubique (C), puisque, pour tout point de la cubique, x, y, z doivent se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Ces quatre surfaces sont, en outre, tangentes deux à deux le long de la cubique et tangentes à la développable D. En d'autres termes, la cubique (C) est une ligne asymptotique de ces quatre surfaces.

Les formules (4) définissent une transformation birationnelle réciproque dans l'espace. A tout point M_0 de l'espace cette transformation fait correspondre, en général, un point M et un seul et, lorsque M vient en M_0, M_0 vient en M. Il y a exception lorsque l'un des points est sur la cubique (C) commune aux trois quadriques données; l'homologue est alors indéterminé sur une génératrice de la développable D. Réciproquement à tout point de D correspond un point de la cubique (C).

Lorsque M_0 décrit une surface d'ordre m, l'homologue M décrit une surface d'ordre $3m$ qui passe par la cubique (C) et a m nappes tangentes le long de cette cubique à la surface développable D. Si la surface donnée passe par la cubique (C) il y a décomposition.

III. Pour que le point M_0 soit dans le plan des x, y ($z_0 = 0$), il faut et il suffit que M soit sur la surface (S) :

$$(7) \qquad 3xyz - 2y^3 - z^2 = 0,$$

qui passe, comme nous l'avons vu, par (C).

Le cône des directions asymptotiques de la surface se décompose en un plan et un cône du second ordre :

$$y = 0, \qquad 3xz = 2y^2.$$

Il n'y a pas de plan parallèle à $y = 0$ qui coupe suivant des droites, sauf $y = 0$.

Les génératrices de cette surface (S), s'il y en a, sont donc des parallèles aux génératrices du cône

$$3xz = 2y^2.$$

Elles ont donc des équations de la forme

$$y = \lambda z + \mu,$$
$$x = \frac{2}{3}\lambda^2 z + \rho.$$

En portant ces valeurs de y et z dans l'équation (7) et écrivant qu'on obtient une identité, on trouve

$$\mu = 0, \qquad \rho = \frac{1}{3\lambda}.$$

Les équations d'une génératrice sont donc

$$y = \lambda z, \qquad x = \frac{2}{3}\lambda^2 z + \frac{1}{3\lambda}.$$

Pour avoir le lieu décrit par M_0 lorsque M décrit cette génératrice, remplaçons x et y par leurs valeurs précédentes dans les expressions de x_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z déduites des formules (4). Tous calculs faits, il vient

$$x_0 = \frac{12\lambda^2 z(\lambda^3 z - 1)^2}{(16\lambda^3 z + 2)(\lambda^3 z - 1)^2},$$

$$y_0 = \frac{6\lambda z(\lambda^3 z - 1)^2}{(16\lambda^3 z + 2)(\lambda^3 z - 1)^2},$$

$$z_0 = 0.$$

Ces formules montrent que x_0 et y_0 sont indéterminés lorsque $z = \frac{1}{\lambda^3}$. Ceci s'explique aisément. Chacune des génératrices de la surface (S) rencontre la cubique (C) en un point tel que $z = \frac{1}{\lambda^3}$. Lorsque M vient en ce point, M_0 est indéterminé sur la tangente à (C). La surface transformée de (S) est une surface du neuvième ordre qui se compose de deux fois la développable D et du plan xOy. En supprimant le facteur $(\lambda^3 z - 1)^2$ qui correspond aux génératrices de D, il reste

$$x_0 = \frac{12\lambda^2 z}{16\lambda^3 z + 2}, \qquad y_0 = \frac{6\lambda z}{16\lambda^3 z + 2}.$$

Le lieu de M_0 est donc la droite

$$x_0 = 2\lambda y_0$$

du plan des x, y.

IV. Pour que le point M_0 soit rejeté à l'infini dans le plan des x, y, il faut et il suffit que les deux termes de z_0 soient nuls, sans que les numérateurs de x_0 et y_0 le soient. Le point M doit donc être sur la partie de l'intersection des deux surfaces

$$3xyz - 2y^3 - z^2 = 0,$$

$$2x^3 - 3xy + z = 0,$$

autre que la courbe (C). Or, les deux surfaces sont tangentes tout le long de (C); elles se coupent donc, en outre, suivant une cubique qui constitue le lieu cherché. En éliminant z on trouve

$$(y + 2x^2)(y - x^2)^2 = 0.$$

Le facteur $(y - x^2)^2$ donne la cubique (C). Le lieu cherché est donc la cubique

$$y = -2x^2, \qquad z = -8x^3.$$

V. Pour que le point M situé sur la génératrice

$$y = tz, \qquad x = \frac{2}{3}t^2 z + \frac{1}{3t}$$

se meuve de façon que son accélération soit dans le plan tangent, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2} & \dfrac{d^2z}{dt^2} \\ \dfrac{2}{3}t^2 & t & 1 \\ \dfrac{4}{3}tz - \dfrac{1}{3t^2} & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En considérant z comme fonction de t, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3}t^2\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{8}{3}t\frac{dz}{dt} + \frac{4}{3}z + \frac{2}{3t^3},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = t\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}.$$

En portant ces valeurs dans (8), et retranchant la seconde ligne multipliée par $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ de la première, on trouve

$$\begin{vmatrix} \dfrac{8}{3}t\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{4}{3}z + \dfrac{2}{3t^3} & 2\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{4}{3}tz - \dfrac{1}{3t^2} & z \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$t\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{dt} - \frac{1}{z} - 2t^3 = 0.$$

En intégrant cette équation linéaire en $\frac{1}{z}$ par le procédé classique, on trouve

$$\frac{1}{z} = Ct + t^3.$$

La trajectoire cherchée est donc

$$x = \frac{2t^2}{3(Ct+t^3)} + \frac{1}{3t},$$

$$y = \frac{t}{Ct+t^3},$$

$$z = \frac{1}{Ct+t^3},$$

qui se réduit à la courbe (C) quand on fait $C = 0$.

Ces résultats étaient faciles à prévoir puisque nous savions que la courbe (C) était une asymptotique de (S). La recherche des trajectoires de M, qui sont les lignes asymptotiques de (S), devait, d'après des résultats bien connus, conduire à l'intégration d'une équation de Ricatti dont on connaissait d'avance une solution.

Deuxième composition de Mathématiques (Sciences I et II).

I. *Étudier la fonction*

$$y = a \,\mathrm{L} \cos\frac{x}{a};$$

a désigne une constante primitive, L *le logarithme népérien. Soit* (C) *la courbe représentative, les axes étant rectangulaires.*

II. *Calculer le rayon de courbure* R *de* (C) *en l'un quelconque* M *de ses points. Déterminer la développée de* (C).

III. *On suppose que* M *appartienne à la même branche de* (C) *que l'origine* O. *Calculer l'arc* s *de* (C) *limité par* O *et* M. *Exprimer* R *en fonction de* s.

IV. *Par les translations parallèles à* Oy, *on déduit de* (C) *une famille de courbes* (Γ). *Déterminer une famille de courbes* (Γ') *telle que chaque courbe* (Γ') *coupe à angle droit toutes les courbes* (Γ). [*On pourra former d'abord une relation entre l'abscisse d'un point quelconque d'une courbe* (Γ') *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*]

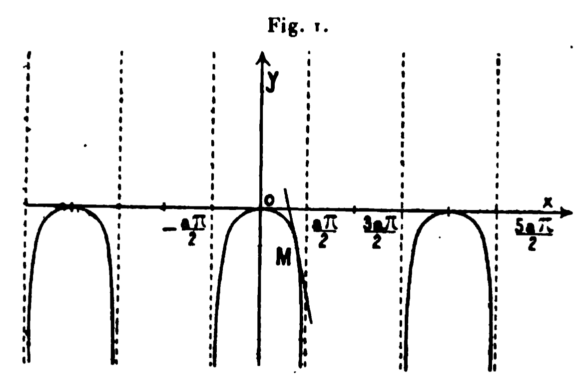
V. *Soit de même* (Γ_1) *la famille des courbes déduites de* (C) *par les translations parallèles à* Ox. *Trouver les courbes* (Γ'_1) *coupant à angle droit les courbes* (Γ_1). [*Former d'abord une relation entre l'ordonnée d'un point quelconque d'une courbe* (Γ_1) *et le coefficient angulaire de la tangente en ce point.*]

VI. Calcul numérique. — *Soient* x_1, y_1 *les coordonnées du point* P *de la courbe* (C) *tel que son abscisse* x_1 *soit positive, et que l'arc* OP *de* (C) *ait pour longueur* $\frac{a}{2}$. *Déterminer, avec trois chiffres exacts, les rapports* $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{a}$.

I. La fonction y est manifestement périodique et admet pour période $2a\pi$. Il suffit donc de construire la courbe représentative lorsque x varie de $-a\pi$ à $+a\pi$. Comme le changement de x en $-x$ ne modifie pas y, on obtiendra la moitié de la courbe en fai-

sant varier x de o à $a\pi$. Or, dans cet intervalle $\cos\frac{x}{a}$ n'est positif, et par suite y réel, que lorsque x varie de o à $\frac{a\pi}{2}$; $\cos\frac{x}{a}$ décroît alors de 1 à o et y décroît de o à $-\infty$. La courbe représentative a donc la forme indiquée sur la figure 1 :

Fig. 1.



II. III. Calculons de suite l'arc s pour appliquer les formules de Frenet. On a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \text{tang}^2\frac{x}{a}\right)dx^2 = \frac{dx^2}{\cos^2\frac{x}{a}}.$$

Prenons sur la courbe comme sens des arcs croissants le sens des x croissants et il vient :

$$ds = \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}},$$

d'où

(1) $$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}} = a\,\text{L tang}\left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4}\right);$$

on a, ensuite,

(2) $$\alpha = \frac{dx}{ds} = \cos\frac{x}{a}, \qquad \beta = \frac{dy}{dx} = -\sin\frac{x}{a},$$

α et β étant les cosinus directeurs de la tangente dans le sens des arcs croissants. Ces formules prouvent, en passant, que, si l'on désigne par φ l'angle de la tangente en un point M avec Ox, on a

$$\varphi = -\frac{x}{a}.$$

En différentiant les formules (2) on obtient

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{a}\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a},$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{a}\cos^2\frac{x}{a},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{x}{a},$$

ou

(3) $$R = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}}.$$

En appelant α' et β' les cosinus directeurs de la normale à la courbe, on a

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds} = -\sin\frac{x}{a},$$

$$\beta' = R\frac{d\beta}{ds} = -\cos\frac{x}{a}.$$

Les coordonnées X et Y du point de contact de la normale au point (x, y) avec la développée sont alors

(4) $$\begin{cases} X = x + \alpha' R = x - a\,\text{tang}\,\frac{x}{a}, \\ Y = y + \beta' R = a\,L\cos\frac{x}{a} - a. \end{cases}$$

Pour exprimer R en fonction de s, nous tirons de la formule (1)

$$\text{tang}\left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tang}\,\frac{x}{2a} + 1}{1 - \text{tang}\,\frac{x}{2a}} = e^{\frac{s}{a}},$$

ce qui donne l'égalité

(5) $$\operatorname{tang}\frac{x}{2a} = \operatorname{tang\,hyp}\frac{s}{2a};$$

on en conclut

(6) $$R = \frac{a\left(1 + \operatorname{tang\,hyp}^2\frac{s}{2a}\right)}{1 - \operatorname{tang\,hyp}^2\frac{s}{2a}} = a\cos\operatorname{hyp}\frac{s}{a}.$$

Ceci met en évidence un fait intéressant signalé par M. Laisant, à savoir que l'égalité (5) entraîne l'égalité suivante :

(7) $$\frac{1}{\cos\frac{x}{a}} = \cos\operatorname{hyp}\frac{s}{a}$$

et aussi celle-ci :

(8) $$\operatorname{tang}\frac{x}{a} = \sin\operatorname{hyp}\frac{s}{a}.$$

IV. Les courbes (Γ) ont pour équation

$$y = a\,\mathrm{L}\cos\frac{x}{a} + \mathrm{C}.$$

En écrivant que, en un point commun (x, y), la courbe (Γ) est orthogonale à (Γ'), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{tang}\frac{x}{a} - 1 = 0$$

qui donne

(9) $$y = \int \cot\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{L}\left(\pm\sin\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}'.$$

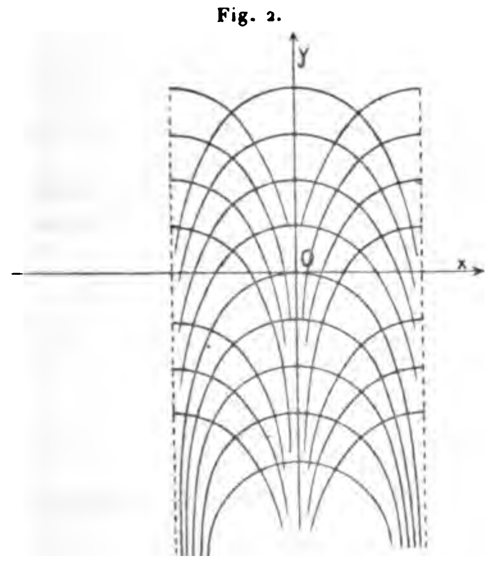
Ces courbes (Γ') [dont il ne faut, évidemment, prendre que la partie située dans les intervalles où les courbes (Γ) existent] se déduisent des courbes (Γ) par

translation parallèle à Ox, car l'équation (9) s'écrit

$$y = a \,\mathrm{L} \cos\left(\frac{x}{a} \mp \frac{\pi}{2}\right) + C'.$$

La figure 2 montre la disposition des courbes (Γ) et (Γ').

Fig. 2.



V. L'équation des courbes (Γ_1) est

$$\frac{x}{a} = \arc\cos e^{\frac{y}{a}} + K.$$

L'équation différentielle des courbes (Γ'_1) est alors

$$\pm \frac{dx}{dy} \frac{e^{\frac{y}{a}}}{\sqrt{1 - e^{\frac{2y}{a}}}} + 1 = 0.$$

Pour intégrer, posons

$$e^{\frac{y}{a}} = \cos\varphi, \qquad y = a \,\mathrm{L} \cos\varphi,$$

et il vient

$$x = \pm a \int \operatorname{tang}^2 \varphi \, d\varphi = \pm a(\operatorname{tang}\varphi - \varphi) + K';$$

on a ainsi les trajectoires (Γ'_1) :

$$(10)\quad \begin{cases} x = \pm a \operatorname{tang}\varphi \pm a\varphi + K', \\ y = \quad a \operatorname{L}\cos\varphi. \end{cases}$$

En comparant ces formules avec les formules (4), on voit que les courbes (Γ'_1) se déduisent de la développée de (C) par une translation.

VI. Les coordonnées x_1, y_1 de P sont données par les formules

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{2}},$$

$$y_1 = a \operatorname{L}\cos\frac{x_1}{a};$$

d'où

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\log e,$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{\log\cos\dfrac{x_1}{a}}{\log e}.$$

Pour cela cherchons, *en grades*, l'angle ψ tel que

$$\log\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{2}\log e = 0,21714,$$

$$\psi = 65^G,2907,$$

d'où

$$\frac{x_1}{2a} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{200} \times 65^G,2907;$$

$$\frac{x_1}{a} = \frac{\pi}{100} \times 15^G,2907,$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{\log\cos(30^G,5814)}{0,43429} = -\frac{0,05216}{0,43429}.$$

Un calcul logarithmique donne

$$\frac{x_1}{a} = \quad 0,4804,$$

$$\frac{y_1}{a} = -0,1201.$$

TABLE DES MATIÈRES.

Juin 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.
(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

JUILLET 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[R4dα]

REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS PRODUITS PAR LE PASSAGE D'UN CONVOI SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS SIMPLES;

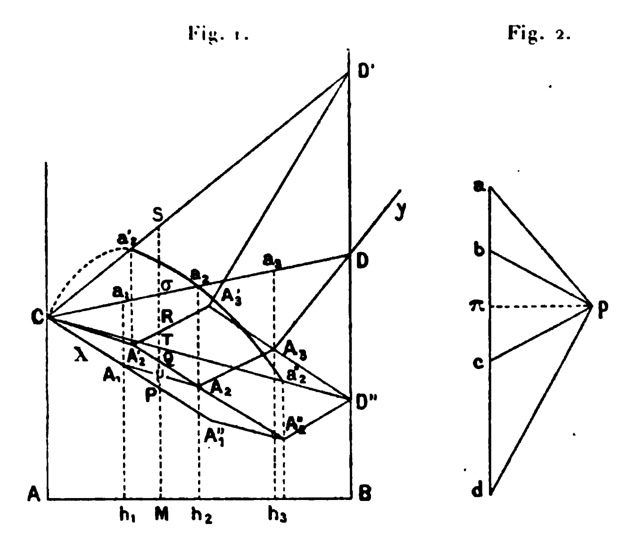
PAR M. LUCIEN LÉVY,
Professeur remplaçant de Géométrie descriptive
au Conservatoire des Arts et Métiers.

Diverses méthodes ont été proposées pour la détermination des moments fléchissants produits dans une poutre par un convoi mobile. M. Maurice Lévy, dans son classique *Traité de Statique graphique* (t. I, p. 352), a fait connaître un intéressant théorème, dû à M. Ventre, théorème établi par des considérations analytiques, et en a déduit une méthode très simple que nous appellerons, pour abréger, *la méthode Ventre*. M. Rouché, dans ses excellents *Éléments de Statique graphique*, a donné la préférence à une méthode inventée par M. Leman (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3ᵉ série, t. IX); outre que cette méthode purement géométrique paraît mieux à sa place que celle de M. Ventre dans un cours de Géométrie descriptive et est certainement plus à la portée des auditeurs du Conservatoire des Arts et Métiers, on verra qu'elle donne des renseignements plus complets que la méthode Ventre. Cette dernière s'en déduit d'ailleurs immédiatement, sans aucun calcul, comme nous le montrerons.

Rappelons rapidement en quoi consiste la méthode Leman. Soit AB la poutre reposant librement par ses

extrémités sur deux appuis A et B. Soient h_1, h_2, h_3 les points de la poutre situés sous les essieux, dans une position quelconque du convoi mobile (*fig.* 1 et 2) :

Fig. 1. Fig. 2.



nous supposons le train entièrement engagé sur la poutre, et nous avons réduit à trois le nombre des essieux pour simplifier la figure.

Soit, enfin, p le pôle du polygone des forces réduit ici à la droite $abcd$; $d = p\pi$ est la distance du pôle à cette droite; $XCA_1A_2A_3Dy$ est le polygone funiculaire correspondant aux trois charges données ab, bc, cd; CD est la ligne de clôture de ce polygone. On sait que le moment de flexion de la poutre au point M (somme des moments par rapport au point M des forces situées à gauche de M, y compris la réaction de l'appui A) a pour expression

$$\mu\sigma \times d.$$

Ce moment varie à chaque instant avec le dia-

gramme $CA_1A_2A_3D$. Le problème consiste à trouver le maximum de ce moment, et aussi le point de la poutre pour lequel ce maximum est le plus grand possible.

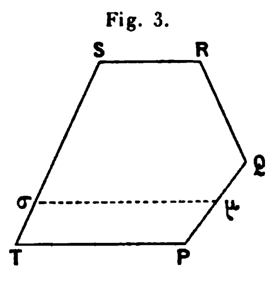
Le polygone des forces et son pôle ne changent pas pendant le mouvement du train; nous garderons aussi C comme origine du polygone funiculaire. Il en résulte que le sommet A_1 décrira une droite XC parallèle à *ap*. De plus, l'écartement des essieux restant constant, le segment A_1A_2 garde la même grandeur et la même direction; le point A_2 décrit donc une parallèle à XC; de même A_3 décrit une droite parallèle à XC. On en déduit facilement, le train marchant de A vers B, le diagramme d'entrée $CA'_2A'_3D'$ correspondant à la position du train pour laquelle l'essieu de queue est au-dessus de l'appui A, et le diagramme de sortie $CA''_1A''_2D''$ correspondant à la position du train pour laquelle l'essieu de tête arrive en B.

La solution très ingénieuse de M. Leman consiste à considérer tous ces diagrammes successifs comme les projections sur le plan de la figure (que nous supposerons horizontale) de diagrammes respectivement égaux à leurs projections et situés dans des plans horizontaux : la position de ces diagrammes est entièrement déterminée dans l'espace si l'on assujettit les sommets projetés en D'', ..., D, ..., D' à être tous sur une même droite, d'ailleurs arbitraire. Nous désignerons, dans ce qui suit, les points de l'espace par les mêmes lettres que leurs projections horizontales, ce qui ne pourra pas produire de confusion; D'' est supposé dans le plan horizontal. Dans cette nouvelle manière de concevoir la figure, la droite mobile de l'espace A_3D décrit un plan $D''A'_3D'$; A_2A_3 décrit le plan $A''_2D''A'_2A'_3$, A_1A_2 le plan $CA''_1A''A'_2$, enfin la droite de clôture CD décrit

un paraboloïde hyperbolique (P) ayant pour plans directeurs le plan horizontal et le plan vertical D′D″. Ces plans, le paraboloïde (P) et les plans horizontaux des diagrammes supérieur et inférieur limitent un solide plan gauche (Π).

Le plan vertical, perpendiculaire à la poutre qui a pour trace MP, coupe le paraboloïde (P) suivant une génératrice rectiligne lieu du point σ; il coupe les autres faces du solide (Π) suivant des lignes droites. On obtient ainsi, dans ce plan vertical, un polygone PQRST; le point μ décrit les côtés PQ, QR (*fig.* 3). Ce polygone, outre ses sommets dans les

Fig. 3.



plans le plus haut et le plus bas, a un sommet sur chaque arête, telle que $A'_2 A''_2$, du solide (Π), rencontrée par le plan sécant. On voit immédiatement que le maximum de $\mu\sigma$ correspondra nécessairement à une position de μ coïncidant avec un des sommets du polygone, Q par exemple. A ce moment, le diagramme mobile $CA_1A_2A_3D$ sera placé de manière que son sommet A_2 soit en Q, et *un des essieux du convoi sera en* M. Ainsi, à moins que le moment maximum au point M ne se produise à l'entrée ou à la sortie du train, pour l'obtenir il suffira de prendre le plus grand des moments obtenus en M, à l'instant du passage d'un essieu en ce point.

Cherchons maintenant le plus grand de ces maximums. Lorsque le train a la position $h_1 h_2 h_3$, le moment de flexion en h_2 a pour valeur $A_2 a_2 \times d$. Suivons le deuxième essieu pendant le déplacement du convoi. La droite $A_2 a_2$ considérée comme étant dans l'espace décrit un plan parallèle à l'arête $A'_2 A''_2$ du solide (Π) et à l'axe du paraboloïde (P); a_2 décrit l'intersection de (P) avec ce plan, c'est-à-dire une parabole. La projection horizontale de cette parabole est une parabole, dont l'axe est perpendiculaire à AB.

Nous ferons ici une remarque importante. Toutes ces sections du paraboloïde par des plans parallèles entre eux sont des paraboles égales, et leurs projections horizontales sont des paraboles égales entre elles. Elles passent toutes par le point C, projection du point où la génératrice verticale du paraboloïde hyperbolique est coupée par le plan sécant. Pour en construire une, il suffira d'en avoir trois points, savoir c, le point a'_2 fourni par le diagramme d'entrée et le point a''_2 par le diagramme de sortie. Une de ces paraboles étant construite aussi exactement que possible, on en découpera un patron qui servira à construire les autres. Sur la figure 1, nous n'avons représenté qu'une de ces paraboles; l'arc en traits pleins est le seul utile. Les moments sous l'essieu sont les portions de perpendiculaires à la poutre comprises entre l'arc et la droite initiale $A'_2 A''_2$. Le moment maximum sous le second essieu correspondra au point pour lequel la tangente est parallèle à $A'_2 A''_2$. On trouvera ainsi pour chaque essieu un moment maximum, et il faut comparer ces moments maximums entre eux.

A cet effet, M. Leman remplace les diagrammes polygonaux ou paraboliques par des diagrammes ayant tous pour ligne de clôture ou pour droite initiale la

poutre AB. Il suffit, pour cela, de faire glisser chaque ordonnée telle que $A'_2 a'_2$ dans sa direction jusqu'à ce que son extrémité supérieure vienne sur la droite AB. On aura alors au-dessous de AB deux espèces de diagrammes.

Aux deux diagrammes polygonaux d'entrée et de sortie $CA'_2 A'_3 D'$, $CA''_1 A''_2 D''$ correspondront des diagrammes polygonaux $A\alpha'_2 \alpha'_3 B$, $A\alpha''_1 \alpha''_2 B$. Ces deux diagrammes auraient pu être obtenus directement, comme d'ailleurs tous les diagrammes polygonaux analogues déduits des diagrammes quelconques $CA_1 A_2 A_3 D$; en effet, $A\alpha'_2 \alpha'_3 B$, par exemple, n'est pas autre chose qu'un polygone funiculaire pour la position du train dans laquelle l'essieu de queue est au-dessus de A, et la méthode de Culmann permet de construire un polygone funiculaire dont trois côtés passent par trois points donnés (on peut aussi employer la construction de M. Collignon).

A un diagramme mixtiligne tel que $A'_2 A''_2 a''_2 a_2 a'_2$, correspondra un diagramme mixtiligne formé de trois droites $h'_2 \alpha'_2$, $h'_2 h''_2$, $h''_2 \alpha''_2$ et d'un arc de courbe $\alpha''_2 \alpha'_2$. *Cette courbe sera une parabole égale à la première.* Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce théorème facile dont voici l'énoncé :

Étant données une parabole et une corde, si, à partir d'une droite arbitrairement donnée, on porte sur les diamètres de la parabole des segments égaux aux portions de diamètre interceptées entre la parabole et sa corde, le lieu des extrémités des segments ainsi obtenus est une parabole égale à la première.

La réciproque du théorème est vraie :

Étant données deux paraboles égales et à axes parallèles, si, à partir de l'une d'elles et sur les dia-

mètres, on porte des segments égaux aux portions interceptées sur ces diamètres entre l'autre parabole et une droite donnée, le lieu des extrémités des segments ainsi obtenus est une droite.

Il n'est pas d'ailleurs nécessaire d'avoir construit les paraboles de la figure 1 pour construire celles de la figure 4. Par exemple la parabole correspondant au deuxième essieu sera déterminée par la direction de son axe (perpendiculaire sur AB) et par trois points γ_2, α'_2, α''_2 tels que

$$A\gamma_2 = Cc_2, \qquad h'_2\alpha'_2 = a'_2 A'_2, \qquad h''_2\alpha''_2 = a''_2 A''_2.$$

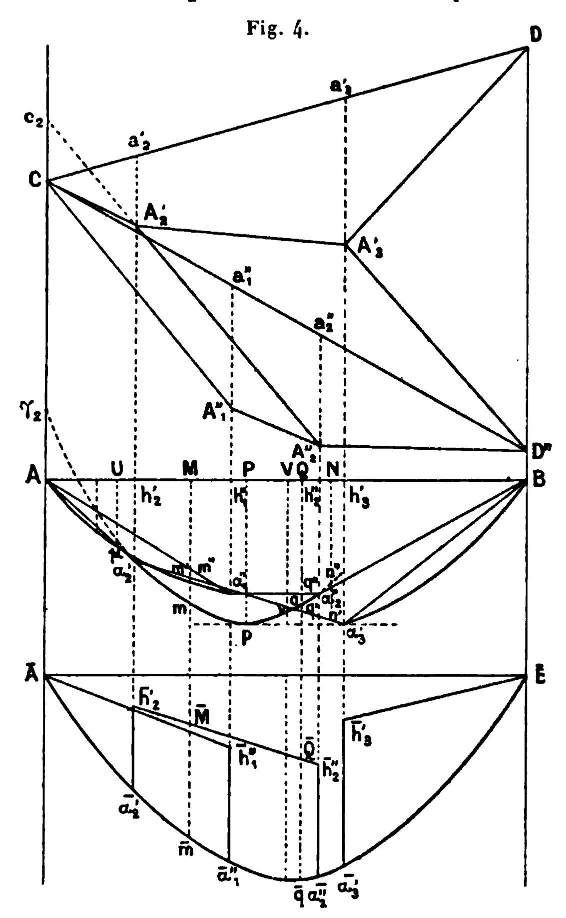
Le contour $AU\alpha'_2 m V\alpha'_3 B$ formé par des arcs de paraboles et par deux droites $V\alpha'_2$, $V\alpha'_3$ donne les moments fléchissants maximums en chaque point. Ainsi en M le moment maximum a pour valeur $Mm \times d$. On peut même suivre la variation du moment fléchissant en M; en effet, son quotient par la distance polaire d commence par avoir la valeur Mm' au premier instant où le convoi est entièrement engagé sur la poutre, croît jusqu'à la valeur Mm qu'il atteint au moment du passage du deuxième essieu (parce que m est sur le deuxième arc de parabole), et décroît jusqu'à la valeur Mm'' qui correspond à la sortie du convoi.

La figure 4 donnera sans peine le moment fléchissant le plus grand; ici il correspond au point P et se produit au moment du passage du deuxième essieu.

Théorème de M. Ventre. — Traçons une parabole quelconque égale à toutes les paraboles précédentes, par exemple celle dont l'axe est perpendiculaire au milieu de la poutre AB, et soit $\overline{AB}$ la corde d'intersection de cette parabole avec les verticales des appuis. Reportons sur cette parabole le diagramme mixtiligne

$\alpha'_2 h'_2 h''_2 \alpha''_2 m \alpha'_2$; on sait, d'après la réciproque énoncée à la page précédente, qu'il suffit pour cela de porter sur deux diamètres, à partir de la nouvelle parabole, des

Fig. 4.



longueurs $\overline{\alpha'_2 h'_2}$, $\overline{\alpha''_2 h''_2}$ respectivement égales aux longueurs de même nom comprises entre AB et la parabole du deuxième essieu. En un point M quelconque de la poutre AB, le moment fléchissant sous le deuxième

essieu sera donné par le produit $\overline{M}\overline{m} \times d$, qui est égal à $Mm \times d$. D'où l'énoncé :

Si une poutre à deux appuis simples, portant ou non une charge permanente uniforme, est parcourue par un convoi quelconque, la valeur que prend le moment fléchissant sous un essieu déterminé, pendant la marche du train, est représentée par les ordonnées d'une parabole UNIQUE POUR TOUS LES ESSIEUX, *ces ordonnées étant seulement comptées à partir de droites différentes pour les différents essieux.*

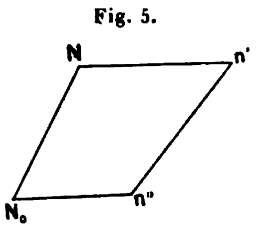
Le lecteur trouvera dans le traité de M. Maurice Lévy (§ 220 et suiv.) la règle très pratique et très simple que ce savant géomètre a déduite du théorème de M. Ventre.

Remarque. — Pour simplifier notre exposé, nous n'avons pas parlé de la charge permanente uniforme portée par la poutre. On sait que les moments de flexion qui en résultent sont représentés par les ordonnées d'une parabole orientée comme les précédentes, et doivent être ajoutés aux moments dont nous avons parlé. Il est facile de voir que cela revient à remplacer les paraboles du texte par d'autres paraboles, aussi toutes égales entre elles, mais avec un paramètre différent. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Comparaison des deux méthodes. — La méthode Ventre n'exige le tracé que d'une parabole. La méthode Leman exige une parabole par essieu; mais, comme toutes ces paraboles sont égales, il suffit de tailler un gabarit en carton sur le patron de l'une d'elles et de s'en servir pour tracer les autres. Pour la recherche du moment maximum maximorum, la méthode Leman le donne immédiatement, comme le montre la figure 4;

cette recherche est plus délicate avec la méthode Ventre. L'une et l'autre méthodes montrent que, pour les points de la poutre situés entre h''_2 et h'_3, le moment de flexion maximum n'est sans doute pas atteint pendant que le convoi est entièrement engagé sur la poutre; aucun essieu n'est, en effet, passé pendant cette période sur la section $h''_2 h'_3$. Mais, tandis que le diagramme Ventre n'offre aucune indication, le diagramme Leman montre que, pendant cette période, le moment de flexion au point N a décru constamment de la valeur $Nn' \times d$ à la valeur $Nn'' \times d$. La figure 5 présenterait ici l'aspect suivant :

Fig. 5.



C'est donc très probablement avant que le train ne fût entièrement engagé sur la poutre que s'est produit le moment maximum, et il s'est produit à l'instant du passage du troisième essieu au-dessus du point N. On sait qu'au lieu de faire reculer le train, on peut avancer la poutre virtuellement d'une même quantité dans le sens de la marche; le même polygone des forces dans lequel on négligera la première charge, la même distance polaire et la plus grande partie des polygones funiculaires déjà dessinés pourront être utilisés. Nous n'insisterons pas sur ce cas qui, en somme, se rencontrera exceptionnellement dans la pratique.

Mais le diagramme Leman présente un dernier avantage. En effet, si l'on envisage les sections Vh'_2 ou Vh''_2 de la poutre, le diagramme Ventre fournit pour tous les

points de cette section un moment de flexion maximum. Au contraire le diagramme Leman montre nettement que cette conclusion serait erronée. Par exemple, au point Q, le premier diagramme donne comme moment de flexion $\overline{Q}\overline{q} = Qq$ au facteur d près; le deuxième montre que le moment commence par avoir la valeur $Qq' \times d$ et décroît constamment, en passant par la valeur $Qq \times d$ jusqu'à la valeur $Qq'' \times d$. Ici encore le moment maximum s'est produit avant que le convoi ne fût entièrement engagé sur la poutre. Le polygone des moments représenté (*fig.* 6) aurait ici l'aspect suivant :

Fig. 6.

S R Q T P

[F8a]

MÉTHODE PARTICULIÈRE D'INTÉGRATION DE

$$\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx$$

QUAND α, β, γ, δ SONT RÉELLES ET QUE $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. E. MATHY.

LEMME. — *Développement des fractions* $\dfrac{A}{(pu - pv)^n}$ *en fonctions entières de* ζ, p, $p^{(n)}$.

Dans la théorie des fonctions elliptiques on démontre que les fractions de la forme $\frac{A}{(pu-pv)^n}$ peuvent s'exprimer en fonctions entières de ζ, p et $p^{(n)}$. Les développements ne sont pas formés; comme ils seront utilisés dans la question à résoudre, je me propose de les rechercher jusqu'à l'exposant 3.

Afin d'abréger les annotations, je pose

$$(1)\qquad \varphi(u, v) = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v).$$

La formule d'addition donne alors

$$(2)\qquad \frac{1}{pu-pv} = -\frac{1}{p'v}\varphi(u, v).$$

En dérivant (2) par rapport à v, on a

$$\frac{p'v}{(pu-pv)^2} = \frac{p''v}{p'^2v}\varphi(u, v) - \frac{1}{p'v}\varphi'_v(u, v).$$

On en conclut

$$(3)\qquad \frac{1}{(pu-pv)^2} = \frac{p''v}{p'^3v}\varphi(u, v) - \frac{1}{p'^2v}\varphi'_v(u, v).$$

On procède de même pour l'exposant 3 et l'on obtient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(pu-pv)^3} &= \left(\frac{p'''v}{2p'^4v} - \frac{3}{2}\frac{p''^2v}{p'^5v}\right)\varphi(u, v) \\ &\quad + \frac{3}{2}\frac{p''v}{p'^4v}\varphi'_v(u, v) - \frac{1}{2p'^3v}\varphi''_v(u, v). \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $\varphi'_v(u, v)$ et $\varphi''_v(u, v)$ se déduisent de (1)

$$(5)\qquad \varphi'_v = -p(u+v) - p(u-v) + 2pv,$$

$$(6)\qquad \varphi''_v = -p'(u+v) + p'(u-v) + 2p'v.$$

Cas particuliers. — Si $pv = e_\alpha$,

$$p'v = 0$$

et les formules sont en défaut; mais alors, on se sert de

$$\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{p u - e_\alpha} = p(u + \omega_\alpha) - e_\alpha.$$

Il suffit de les élever au carré, puis au cube, et de remplacer

$$p^2 = \frac{1}{6} p'' + \frac{1}{12} g_2,$$

$$p^3 = \frac{1}{120} p^{(\text{IV})} + \frac{3}{20} g_2 p + \frac{1}{10} g_3$$

pour avoir les expressions intégrables.

Méthode d'intégration. — *Soit à calculer*

$$\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\, dx$$

avec

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta.$$

En posant $\alpha - x = \frac{1}{y}$, on en déduit

$$(7) \quad \begin{cases} \beta - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \beta), \qquad dx = \dfrac{dy}{y^2}, \\ \gamma - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \gamma), \\ \delta - x = \dfrac{1}{y} - (\alpha - \delta). \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)(\delta - x)}\, dx \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\beta)\right)\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\gamma)\right)\left(\frac{1}{y} - (\alpha-\delta)\right)\frac{1}{y}}\,\frac{dy}{y^2} \\ &= i\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\sqrt{\left(y - \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha-\gamma}\right)\left(y - \frac{1}{\alpha-\delta}\right)}\,\frac{dy}{y^4}. \end{aligned}$$

Le polynome sous le radical est du troisième degré;

pour faire disparaitre le terme du second degré, on fait

$$(8)\qquad y = z + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\delta}\right) = z + \frac{1}{3}\mathrm{A}.$$

En outre, si

$$(9)\qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{\alpha-\beta} - \dfrac{1}{3}\mathrm{A}, \\ e_2 = \dfrac{1}{\alpha-\gamma} - \dfrac{1}{3}\mathrm{A}, \\ e_3 = \dfrac{1}{\alpha-\delta} - \dfrac{1}{3}\mathrm{A}, \end{cases}$$

l'expression se change en

$$i\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}\mathrm{A}\right)^4}.$$

Enfin, soient

$$(10)\qquad z = pu \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{3}\mathrm{A} = pv;$$

de ce que

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)},$$

on pourra écrire

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = -\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\frac{p'^2u\,du}{(pu-pv)^4}.$$

Conséquemment

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx \\ \displaystyle\quad = -\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\int\frac{p'^2u\,du}{(pu-pv)^4}. \end{cases}$$

D'abord, on peut remarquer que de

$$\frac{d}{du}\frac{p'u}{(pu-pv)^3} = \frac{p''u}{(pu-pv)^3} - 3\frac{p'^2u}{(pu-pv)^4},$$

on en déduit

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{p'^2 u\, du}{(pu - pv)^4} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{p'u}{(pu-pv)^3}\right)_{\text{lim}} + \frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3}. \end{aligned}\right.$$

En outre, de ce que

$$\begin{aligned} p''u &= 6p^2 u - \frac{1}{2} g_2 \\ &= 6(pu - pv)^2 + 12pv(pu - pv) + 6p^2 v - \frac{1}{2} g_2, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\frac{1}{3}\frac{p'' u}{(pu-pv)^3} = \frac{2}{pu - pv} + \frac{4pv}{(pu-pv)^2} + \frac{1}{3}\frac{p'' v}{(pu-pv)^3}.$$

On peut donc intégrer $\frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3}$ par les formules (2), (3) et (4)

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{3}\int \frac{p'' u\, du}{(pu-pv)^3} \\ &= -\frac{2}{p'v}\int \varphi(u,v)\, du \\ &\quad + \frac{4pv\, p''v}{p'^3 v}\int \varphi(u,v)\, du - \frac{4pv}{p'^2 v}\int \varphi'_v(u,v)\, du \\ &\quad + \left(\frac{p''v\, p'''v}{6p'^4 v} - \frac{1}{2}\frac{p''^3 v}{p'^5 v}\right)\int \varphi(u,v)\, du \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{p''^2 v}{p'^4 v}\int \varphi'_v(u,v)\, du - \frac{1}{6}\frac{p'' v}{p'^3 v}\int \varphi''_v(u,v)\, du. \end{aligned}\right.$$

Or, de (1), (5) et (6), on tire

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \int \varphi(u,v)\, du &= \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v, \\ \int \varphi'_v(u,v)\, du &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) + 2u\,pv \\ &= \zeta u + \frac{p'u}{pu - pv} + 2u\,pv, \\ \int \varphi''_v(u,v)\, du &= -p(u+v) + p(u-v) + 2u\,p'v \\ &= \frac{p'u\, p'v}{(pu-pv)^2} + 2u\,p'v. \end{aligned}\right.$$

En se servant de (13) et (14), on a, en groupant les termes,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{p'^2 u\, du}{(pu - pv)^4} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{p'u}{(pu-pv)^3} - \frac{1}{6}\frac{p''v}{p'^3 v}\left(\frac{p'u\, p'v}{(pu-pv)^2} + 2u\, p'v\right) \\ &\quad -\left(\frac{4pv}{p'^2 v} - \frac{1}{2}\frac{p''^2 v}{p'^4 v}\right)\left(\frac{p'u}{pu-pv} + 2\zeta u + 2u\, pv\right) \\ &\quad -\left(\frac{2}{p'v} - \frac{4pv\, p''v}{p'^3 v} - \frac{1}{6}\frac{p''v\, p'''v}{p'^4 v} + \frac{p''^3 v}{2p'^5 v}\right)\left(\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta v\right) \end{aligned}\right.$$

La question sera complètement résolue si l'on exprime pv, $p'v$, $p''v$ et $p'''v$ en fonction de α, β, γ, δ.

Or

$$(16)\qquad pv = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\delta}\right),$$

on obtient ainsi

$$(17)\qquad p'v = \frac{-2i}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}}.$$

$$(18)\qquad p''v = 6p^2 v - \frac{1}{2}g_2 = 2\frac{3\alpha - (\beta+\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

En outre, on sait que

$$(19)\qquad p'''v = 12\, p\, p'.$$

Les limites d'intégration sont fournies par

$$\alpha - x = \frac{1}{pu - pv};$$

aux valeurs extrêmes de x correspondent celles de u.

D'un autre côté, de (16) et (17) on conclut que v est purement imaginaire et compris entre 0 et ω'.

Valeur de l'intégrale quand les limites de l'intégration sont $x = \gamma$ et $x = \beta$. — Dans ce cas : $x = \gamma$

donne

$$\alpha-\gamma=\frac{1}{pu-pv}, \qquad pu=e_2, \qquad u=\omega'';$$

$x=\beta$ donne

$$\alpha-\beta=\frac{1}{pu-pv}, \qquad pu=e_1, \qquad u=\omega.$$

Mais alors

$$(p'u)_{\omega''}^{\omega}=0, \qquad (\zeta u)_{\omega''}^{\omega}=-\eta', \qquad \left(\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}\right)_{\omega''}^{\omega}=-2\eta'v.$$

Avec ces conditions, la formule (15) devient

(20)
$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\omega''}^{\omega}\frac{p'^2u\,du}{(pu-pv)^4}\\ &=\frac{1}{3}\frac{p''v}{p'^2v}\omega'+\left(\frac{8pv}{p'^2v}-\frac{p''^2v}{p'^4v}\right)(\eta'+\omega'pv)\\ &\quad+\left(\frac{4}{p'v}-\frac{8pv\,p''v}{p'^3v}-\frac{1}{3}\frac{p''v\,p'''v}{p'^4v}+\frac{p''^3v}{p'^5v}\right)(\eta'v-\omega'\zeta v).\end{aligned}\right.$$

Les notations ω' et η' peuvent être remplacées par K′ et E′ qui ont été calculées par Legendre; les formules sont

(21)
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\omega'}{i}=\frac{K'}{\sqrt{e_1-e_3}}, \qquad i\eta'=E'\sqrt{e_1-e_3}+\frac{e_3K'}{\sqrt{e_1-e_3}},\\ &k'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\sin^2\left(\frac{u}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Il est donc possible d'obtenir la valeur précise de

(22)
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\int_{\gamma}^{\beta}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\,dx}{\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}}\\ &=+\frac{1}{3}\frac{p''v}{p'^2v}\frac{\omega'}{i}\\ &\quad-\left(\frac{8pv}{p'^2v}-\frac{p''^2v}{p'^4v}\right)\left(i\eta'-\frac{\omega'}{i}pv\right)\\ &\quad-\left(\frac{4}{p'v}-\frac{8pv\,p''v}{p'^3v}-\frac{1}{3}\frac{p''v\,p'''v}{p'^4v}+\frac{p''^3v}{p'^5v}\right)\left(i\eta'v+\frac{\omega'}{i}\zeta v\right).\end{aligned}\right.$$

Application géométrique. — *Volume commun à deux cylindres droits à bases circulaires dont l'un pénètre l'autre, quand les deux axes sont perpendiculaires entre eux.*

Soit a la plus courte distance des deux axes des cylindres. On choisit comme axe des Z l'axe du cylindre pénétré, et comme axe des X la plus courte distance; cette plus courte distance rencontre l'axe des Z en O; par O on mène une perpendiculaire au plan ZOX; c'est l'axe des Y qui devient parallèle à l'axe du second cylindre.

Cela posé, il est facile de voir que les équations des deux cylindres sont

$$y^2 + x^2 = R^2, \tag{23}$$

$$z^2 + (x - a)^2 = r^2. \tag{24}$$

Une tranche commune aux deux cylindres, parallèle à ZOY et d'épaisseur dx, a pour volume

$$yz\,dz;$$

le volume total commun sera

$$V = 4\int zy\,dx,$$

ou

$$V = 4\int \sqrt{(R^2 - x^2)[r^2 - (a - x)^2]}\,dx. \tag{25}$$

Les quatre racines du polynome sont réelles : dans le cas de pénétration

$$\delta = -R, \quad \gamma = (a - v), \quad \beta = a + r, \quad \alpha = R;$$

dans le cas d'arrachement

$$\delta = -R, \quad \gamma = (a - v), \quad \beta = R, \quad \alpha = a + r.$$

On reconnait que les limites d'intégration sont γ et β et qu'il faut appliquer la formule (22).

[M'm]

SUR L'ÉQUATION INTRINSÈQUE DES LIGNES QUI APPARTIENNENT A CERTAINES SURFACES DE RÉVOLUTION ET DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Empoli.

La méthode que j'ai exposée dans un article récent ([1]) et qui m'a servi pour trouver l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent au cylindre de révolution peut s'étendre à d'autres cas que je crois bien de faire connaître dans cette Note.

Je commence par écrire les deux groupes de formules

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dA}{ds} &= \frac{B}{\rho} - 1,\\ \frac{dB}{ds} &= -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T},\\ \frac{dC}{ds} &= \frac{B}{T}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dm_1}{ds} &= \frac{m_2}{\rho} + \sin^2\theta,\\ \frac{dm_2}{ds} &= -\frac{m_1}{\rho} - \frac{m_3}{T} + \cos\theta_1\cos\theta_2,\\ \frac{dm_3}{ds} &= \frac{m_2}{T} - \cos\theta_1\cos\theta_3 \end{aligned}\right.$$

dans le premier desquels A, B, C représentent les distances des plans principaux d'une courbe à double courbure $\mathcal{L}$ à un point fixe R, et dans le deuxième :

$$m_i = M_h\cos\theta_k - M_k\cos\theta_h,$$

([1]) *Sur l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution* (*Nouv. Ann.*, 1904).

où i, h, k est une combinaison des nombres 1, 2, 3 et M_h représente le moment de la direction principale $h^{\text{ième}}$ par rapport à une droite fixe r avec laquelle elle forme l'angle θ_h.

Je rappelle enfin que les expressions

$$A^2 + B^2 + C^2 \quad \text{et} \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

mesurent le carré de la distance d'un point de la courbe $\mathfrak{L}$ au point R et à la droite r respectivement.

Cela posé, soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe $\mathfrak{C}$ rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy et soit P un des points où elle est rencontrée par la ligne $\mathfrak{L}$ appartenant à la surface de révolution engendrée par $\mathfrak{C}$ lorsqu'on fait tourner son plan autour d'une de ses droites, par exemple autour de l'axe Ox. Posant $l^2 = x^2 + y^2$ ([1]), l'équation de $\mathfrak{C}$ pourra s'écrire sous la forme

$$\lambda(y, l^2) = 0.$$

Nous admettrons que de cette équation on puisse tirer

$$(1) \qquad y = \varphi(l^2);$$

alors, comme y, représentant la distance de P à l'axe de rotation, est mesuré par $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ et l par $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, nous pourrons substituer à l'équation (1) l'autre qui lui équivaut

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \varphi(A^2 + B^2 + C^2).$$

Voilà la relation qui lie les distances d'un point de $\mathfrak{L}$ à R

([1]) Dans ce qui va suivre nous avons supposé que R appartient à r.

et r; d'ici, en élevant au carré et différentiant ensuite par rapport à l'arc s de $\mathfrak{L}$, tenant compte des formules (I) et (II), on trouvera

(2) $$m_1 = - \mathrm{A}\frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2}.$$

Les cas auxquels nous nous bornerons dans cette Note s'obtiennent en supposant

$$\frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2} = a \qquad (a \text{ const. réelle}).$$

Il en résulte

(3) $$\varphi^2(l^2) = al^2 + b \qquad (b \text{ const.}).$$

D'ailleurs, comme

$$m_1 = - a\mathrm{A},$$

les deux premières des formules (II) nous donneront

$$m_2 = - a\mathrm{B} + (1 - a)\rho + \rho\cos^2\theta,$$
$$m_3 = - a\mathrm{C} + \mathrm{T}\frac{d\rho}{ds}(1 - a - \cos^2\theta_1) - 3\mathrm{T}\cos\theta_1\cos\theta_2$$

et la troisième nous conduira à une relation du type

$$\mathrm{A}_{11}\cos^2\theta_1 + \mathrm{A}_{22}\cos^2\theta_2 + \mathrm{A}_{33}\cos^2\theta_3 + \mathrm{A}_{12}\cos\theta_1\cos\theta_2$$
$$+ \mathrm{A}_{23}\cos\theta_2\cos\theta_3 + \mathrm{A}_{13}\cos\theta_1\cos\theta_3 + \mathrm{A} = 0,$$

où les A sont des fonctions connues de ρ, T et a.

De là, suivant la méthode indiquée dans la Note précitée, nous parviendrons à l'équation intrinsèque $\mathrm{W} = 0$.

Les équations (1) et (3) nous donneront

(4) $$ax^2 + (a - 1)y^2 + b = 0$$

pour équation de la section méridienne. Cette courbe étant une conique, on en déduit que, pour $a > 1$, l'équation $\mathrm{W} = 0$ sera l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à l'*ellipsoïde allongé* : b doit

être négatif pour la réalité de la surface. Pour $o < a < 1$, $W = o$ sera l'équation intrinsèque d'un *hyperboloïde à une nappe* ($b > o$) ou *à deux nappes* ($b < o$) ou bien d'une *surface conique de révolution* ($b = o$). Enfin, on obtiendra l'équation intrinsèque de l'*ellipsoïde aplati* pour $a < o$ et $b > o$ ([1]).

Lorsque a est fonction de l^2, dans $W = o$ figurent les quantités A, B, C; l'équation cherchée résulterait, en éliminant A, B, C, entre cette équation-ci et le système (I).

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique par M. *G. Humbert*, Membre de l'Institut. — Tome II, 1 vol. in-8° de XVIII-493 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Le second Volume du *Cours d'Analyse* de M. G. Humbert répond, mieux que nous n'aurions osé le prévoir, aux espérances que nous avait fait concevoir le Tome I. Nous y retrouvons les qualités de simplicité, de clarté et de méthode qui caractérisaient le premier Volume. La lecture de cet Ouvrage, faite à titre de délassement pendant les vacances, a été pour nous un vrai régal.

Le Volume est divisé en trois Parties : Compléments du Calcul intégral, Fonctions analytiques et elliptiques, Équations différentielles.

Le programme de l'enseignement des Mathématiques à

([1]) Nous nous sommes bornés aux cas remarquables. Pour $a = o$, on obtiendrait le cas du cylindre de révolution, que j'ai déjà étudié. La forme de l'équation (3) nous montre que la sphère est exclue de nos considérations.

l'École Polytechnique est partagé en deux années : la première où l'on apprend le Calcul différentiel, l'autre réservée au Calcul intégral. Cette division surannée et factice ne doit pas être sans gêner quelque peu les professeurs de l'École obligés de se plier à cette règle qui devait même avoir de graves inconvénients avant qu'on eût sagement accru le programme de la classe de Mathématiques spéciales des notions essentielles sur ces matières.

Le Cours de M. Humbert se ressent de ces entraves dans son ordonnancement. Il avait bien été obligé, malgré les programmes, de parler quelque peu du Calcul intégral dans le premier Volume; mais il n'avait pu le faire que fort discrètement en se contentant de donner des définitions approchées et les règles fondamentales du calcul des quadratures. Il revient donc tout d'abord sur ce sujet pour préciser les notions analytiques d'aire et de volume pour parler des intégrales multiples et des intégrales de lignes et de surfaces. Le Chapitre sur le changement de variables dans une intégrale multiple est particulièrement clair et précis. Évitant toujours, et avec raison, de noyer le lecteur dans de grandes théories abstraites, il expose d'abord le problème, par voie géométrique, sur des exemples d'intégrales doubles, pour ensuite généraliser le procédé par voie purement analytique. Cette manière de faire qui va du simple au compliqué est bien, en matière d'enseignement, généralement la meilleure. De ce que, dans quelques cas particuliers, la théorie générale, à cause de la symétrie des notations, est plus simple que l'étude d'un exemple, certains auteurs ont cru devoir généraliser la méthode qui consiste à embrasser toujours une question dans toute son ampleur, dès le premier abord, pour n'en déduire qu'ensuite, à titre d'exercices, l'examen de cas simples et d'usage courant. C'est une erreur, et il faut savoir discerner. C'est dans ce choix judicieux que se manifeste le talent d'un professeur, et M. Humbert nous prouve qu'il possède ce talent au plus haut degré.

Des applications intéressantes du Calcul des intégrales multiples aux aires, volumes, centres de gravité, moment d'inertie, courbes tautochrones et étude sommaire des fonctions eulériennes complètent heureusement la première Partie.

La théorie générale des fonctions analytiques, telle qu'elle

ressort des admirables travaux de Cauchy, Weierstrass, Mittag-Leffler et tant d'autres, ne paraît pas, à première vue, d'une nécessité absolue dans un Ouvrage destiné à de futurs ingénieurs. Mais, comme le fait remarquer l'auteur dans sa Préface, « l'École Polytechnique n'est ni une école de pure théorie, ni une école de pure application ». On doit y donner aux élèves « une instruction étendue et solide », et il serait peut-être téméraire de retrancher de l'enseignement des théories qui tiennent aujourd'hui une si grande place dans la Science, sous prétexte qu'elles ne sont pas immédiatement utilisables par les praticiens. Sait-on d'ailleurs si elles ne serviront pas sous peu? Et du reste l'exemple des fonctions elliptiques, qui *pourraient* être utilisées, et qu'on ne peut étudier sans avoir quelque peu approfondi la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, vient à point corroborer cette assertion. Non seulement nous approuvons M. Humbert, mais nous irons même plus loin que lui dans cette voie; et si nous osions formuler un desideratum à propos de son excellent Ouvrage, nous émettrions le regret de ne pas y voir quelques indications plus développées sur la théorie des *Groupes de transformations*. Cette théorie est actuellement d'une telle importance, elle s'infiltre à tel point dans toutes les parties des Mathématiques, qu'on ne s'explique pas pourquoi, en France du moins, on l'écarte systématiquement de tout enseignement.

Pour l'étude des fonctions analytiques l'auteur adopte le point de vue de Cauchy. C'est le procédé le plus bref, le plus clair et aussi le plus complet si l'on y ajoute, comme c'est le cas ici, des indications sur les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler.

M. Humbert s'est à peu près borné à l'étude des intégrales de fonctions uniformes, se contentant de notions rapides, mais suffisantes, sur le cas où la fonction possède des points de branchement du type de celui de $\sqrt{z-a}$, pour $z=a$, et, par suite, il n'a pas cru devoir se servir des feuillets de Riemann. C'est évidemment raisonnable. Il a ainsi préparé le terrain pour une étude sommaire des fonctions elliptiques.

Jusqu'ici on nous a trop souvent habitué ou bien à réduire la place accordée aux fonctions elliptiques, dans un traité classique, à si peu de chose que le lecteur n'avait aucune idée nette sur la question, ou bien à nous présenter quelque volu-

mineuse monographie propre à rebuter les plus vaillants par ses dimensions. M. Humbert a réussi à condenser fort habilement en quatre-vingts pages tout ce qui est essentiel sur le sujet. Pour exposer la théorie des fonctions elliptiques on suit d'ordinaire deux voies : l'une, la grande voie royale, qui consiste à construire d'abord les fonctions σ, à en faire une étude magistrale pour passer de là à la fonction ζ puis à la fonction pu; l'autre, en quelque sorte historique, qui définit de suite pu par l'inversion d'une intégrale de première espèce, mais qui se heurte rapidement à des difficultés telles qu'on abandonne le plus souvent la partie, pour laisser l'étudiant dans l'ignorance. L'auteur en a choisi une troisième fort élégante et d'une remarquable rapidité.

Il définit d'abord ζu par une série de Mittag-Leffler, après avoir succinctement établi les propriétés générales des fonctions doublement périodiques uniformes. Cette série met de suite en évidence les propriétés essentielles de la fonction ζ, qui, d'ailleurs, est rationnellement *construite* comme fonction méromorphe admettant comme pôles les points périodes

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

La fonction pu est alors définie par l'égalité

$$pu = -\zeta' u$$

et σu par

$$\sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du}$$

qui entraîne

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u.$$

Ainsi, en quarante pages, nous apprenons à connaître les principales fonctions elliptiques, leurs propriétés essentielles, leurs relations fondamentales, jusques y compris les formules d'addition. Le reste n'est qu'applications et *calculs numériques,* car judicieusement l'auteur a tenu à montrer comment pratiquement on pourra se servir de ces fonctions.

La dernière partie du Volume traite des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous y trouvons d'abord les procédés d'intégration des équations différentielles classiques

du premier ordre. Ce Chapitre est actuellement presque en entier dans le programme de la classe de Mathématiques spéciales, aussi les professeurs de l'enseignement secondaire pourront-ils y puiser à loisir.

Viennent ensuite les cas de réduction les plus courants d'équations d'ordre quelconque et des indications sommaires sur les systèmes d'équations différentielles.

L'auteur a réservé deux longs Chapitres aux équations linéaires, et même il a cru devoir en consacrer un tout entier à l'étude de la forme analytique de leurs intégrales. Était-ce bien nécessaire ou simplement *utile?* N'y a-t-il pas eu là quelque entraînement, quelque suggestion inspirée par les récents et superbes travaux sur les équations différentielles à points critiques fixes? En revanche, nous nous étonnons un peu de ne pas trouver, dans une étude aussi détaillée, les indications nécessaires pour l'intégration des équations dont les coefficients sont linéaires en x. On sait, en général, les intégrer, il eût peut-être été bon de le faire savoir à de futurs praticiens.

Le Volume se termine par l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et de quelques types simples classiques d'ordre supérieur au premier.

Nous pensons en avoir assez dit pour avoir pu montrer tout l'intérêt de ce beau *Cours d'Analyse.* Il eût été bien regrettable que M. Humbert ne l'ait pas publié, car il rendra certainement de grands services à d'autres qu'aux jeunes Polytechniciens. C'est, par excellence, l'Ouvrage qui convient aux candidats au certificat de Calcul différentiel et intégral de nos Facultés des Sciences. Ils le liront sans peine et y trouveront, sous une forme toujours simple et claire, quoique fort rigoureuse et précise, les notions dont on est en droit d'exiger d'eux la connaissance.

CARLO BOURLET.

LEÇONS SUR L'INTÉGRATION ET LA RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES, professées au Collège de France par M. *Henri Lebesgue,* Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes. — 1 vol. in-8° de VII-138 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Jadis nos pères, j'entends par là les mathématiciens de

talent qui ont construit notre Science, attendaient que les difficultés se présentassent pour les résoudre.

Aujourd'hui il est une jeune génération qui court au-devant des écueils, dédaigne les grandes routes claires, celles qui parfois sont les voies triomphales, et se complaît à côtoyer les précipices, au risque d'avoir le vertige, en des chemins étroits et broussailleux où l'on a grand'peine à ne pas se perdre.

Autrefois on se garait des fonctions discontinues, comme un artiste se gare des difformités ; aujourd'hui on les recherche, on construit à plaisir, et non sans peine, des monstres ; et, pour peu que vous les y poussiez, nos jeunes chercheurs vous prouveront irréfutablement que la fonction continue, au moins dans leurs conceptions sinon dans la nature, n'est qu'un accident négligeable.

Et cependant, quelque doute que l'on puisse émettre sur la nécessité ou l'utilité de tels travaux, on est forcé d'admirer l'ingéniosité, la profondeur de vues, l'impeccable logique de ceux qui s'y livrent et y réussissent comme M. Henri Lebesgue. Ils rendent service à la Philosophie de notre Science, nous apprennent à nous défier de nous-mêmes, et nous incitent, en nous montrant la voie, à peser scrupuleusement nos mots et nos idées.

Les définitions mathématiques, nous dit M. Lebesgue (p. 99), appartiennent à deux classes. Les unes sont *descriptives*, c'est-à-dire qu'on y énonce des propriétés caractéristiques de l'être qu'on veut définir ; les autres sont *constructives*, car on y énonce quelles opérations il faut faire pour obtenir l'être que l'on veut définir.

La définition de la fonction primitive est descriptive puisque cette fonction est définie par la propriété d'avoir une fonction donnée $f(x)$ pour dérivée ; au contraire la définition de l'intégrale indéfinie, d'après Riemann, par la limite de la somme

$$k + \sum_{a}^{x} f(x_i)\,\delta_i$$

quand le maximum des intervalles partiels δ_i tend vers zéro, est évidemment *constructive*.

Ces deux définitions, de nature différente, et plus généralement toutes celles qu'on a pu donner de la fonction primitive ou de l'intégrale indéfinie sont-elles d'accord ? Telle est

la question que se pose M. Lebesgue, qu'il s'est posée dans sa thèse, qu'il a résolue et dont il a enseigné les résultats en un cours de vingt leçons pendant l'hiver 1902-1903 au Collège de France.

Lorsqu'il s'agit de fonctions continues tout marche à souhait; c'est lorsqu'il y a des discontinuités que la chose se complique.

Si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$ (supposée continue) l'intégrale définie est

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Et déjà, pour que cette définition simple ait un sens, faut-il établir l'existence de la primitive $F(x)$. Ceci se fait au moyen d'une aire et cela conduit Cauchy à préciser la notion d'*aire* comme limite d'une somme de rectangles infiniment petits. L'intégrale étant définie lorsque $f(x)$ est continue, si $x = a$ est une discontinuité de $f(x)$, Cauchy considère

$$S = \int_\alpha^{a-h} f(x)\,dx + \int_{a+k}^\beta f(x)\,dx$$

et fait tendre h et k vers zéro, simultanément et indépendamment. Si S a une limite, ce sera l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Dirichlet étend le procédé de Cauchy au cas où les discontinuités de $f(x)$ forment un ensemble e dont le dérivé e' ne contient qu'un nombre fini de points.

M. Lebesgue recherche quels sont *tous* les cas où le procédé de Cauchy est applicable et arrive à la conclusion qu'il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ soit *réductible,* en supposant l'existence de $F(x)$ vérifiant l'égalité (1) pour les intervalles de continuité.

Riemann, pour dégager la définition de l'intégrale de toute interprétation géométrique, prend comme définition précisément celle que Cauchy emploie pour l'aire. D'après lui on a alors,

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum \delta_i f(x_i),$$

et Paul du Bois-Reymond montre que, pour que le second membre ait une limite pour une fonction *bornée*, il faut et il suffit que les points de discontinuité de $f(x)$ forment un *groupe intégrable*, c'est-à-dire un ensemble de points pouvant être enfermés dans un nombre *fini* de segments dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut, ensemble de *mesure nulle*.

C'est là une condition plus large que la précédente.

Cette définition purement analytique de l'intégrale définie peut d'ailleurs, d'après M. Jordan, être présentée sous une forme géométrique. Il faut alors reprendre une à une les notions de courbe et d'aire.

Une *courbe* est définie par les égalités

$$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$

où l'on fait varier t de t_0 à t_1.

Elle est *fermée* si, pour t_0 et t_1, x et y reprennent les mêmes valeurs. Pour un esprit simpliste la notion d'aire limitée par une telle courbe est intuitive; mais, hélas! les choses ne sont pas toujours aussi simples que l'aire d'un cercle ou d'une ellipse, lorsqu'on s'égare dans la forêt des fonctions biscornues. On a découvert des *courbes* qui couvrent *toute une région du plan;* telle est la courbe de Péano qui, lorsque t varie, passe par *tous* les points de la surface d'un carré! Qu'est-ce alors que l'aire *limitée* par une telle courbe?

M. Jordan, ayant défini l'*intérieur* de la courbe, partage le plan en petits carrés; il considère d'une part la somme de tous ceux dont *tous* les points sont intérieurs à la courbe et d'autre part la somme de ceux dont *quelques* points au moins sont intérieurs à la courbe. Ces deux sommes ont des limites, lorsque les petits carrés tendent vers zéro, qui sont ce qu'il appelle les *étendues intérieure* et *extérieure* de la courbe.

La courbe a alors une *aire* si ces deux étendues sont égales; et, tout bien pesé, on retrouve exactement l'intégrale de Riemann.

La recherche de la fonction primitive suivant la définition descriptive *paraît* maintenant également résolue. Si l'on considère en effet l'intégrale *indéfinie* de la fonction bornée

intégrable $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + k,$$

où k est arbitrairè. On a une *fonction continue qui admet $f(x)$ pour dérivée en tous les points où $f(x)$ est continue.*

Mais que se passe-t-il aux discontinuités de $f(x)$? La difficulté est toujours la même et, si l'on voulait trouver une fonction primitive de $f(x)$ qui aurait pour dérivée $f(x)$ pour *toutes* les valeurs de x, le problème n'aurait généralement *aucune* solution. En effet, pour une valeur x_0 de discontinuité, les trois nombres (supposés exister) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0)$ ne sont pas tous trois égaux. Or, $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$, d'après le théorème de la moyenne, aura pour limite $f(x_0 - 0)$ ou $f(x_0 + 0)$ suivant que h tend vers zéro par valeurs négatives ou positives, et sa limite ne sera pas $f(x_0)$, comme on le désirerait.

Lorsqu'un problème n'a pas, en général, de solution, le mathématicien d'ordinaire le transforme de façon qu'il en ait une.

Ce qui précède montre que $F(x)$ a, pour $x = x_0$, en quelque sorte *deux* dérivées, l'une à gauche, l'autre à droite, respectivement égales aux *deux* valeurs, à gauche et à droite, de $f(x)$.

Plus généralement, si l'on considère un point de discontinuité x_0 d'une fonction bornée $f(x)$, soient M et m les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $x_0 - \varepsilon$, x_0. Lorsque ε tend vers zéro M et m ont respectivement des limites M_g et m_g qui sont les *limites supérieure et inférieure à gauche de $f(x)$ pour $x = x_0$*. On définit de même les *limites supérieure et inférieure à droite* M_d et m_d.

Soit alors $F(x)$ une fonction à variation bornée. Le rapport

$$\varphi(h) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

est une fonction bornée et ses quatre limites pour $h = 0$ sont les quatre *nombres dérivés* λ_g, Λ_g, λ_d, Λ_d, inférieur et supérieur, à gauche et à droite, de $F(x)$ pour $x = x_0$.

Le problème de la recherche de la fonction primitive peut

alors se généraliser en considérant la fonction comme déterminée par *un* de ses nombres dérivés.

Et tout compte fait on parvient à la conclusion que : *pour qu'une fonction intégrable* (sens de Riemann) *soit une fonction dérivée* (c'est-à-dire soit en *tous* ses points la dérivée d'une autre) *il faut et il suffit qu'elle ait en tout point une valeur moyenne déterminée et qu'elle soit partout égale à sa valeur moyenne.*

La valeur moyenne pour $x = x_0$ est la limite de l'intégrale

$$\frac{1}{k+h}\int_{x_0-h}^{x_0+k} f(x)\,dx,$$

quand k et h tendent vers zéro.

Il reste cependant à voir si l'on peut étudier les fonctions dérivées sans passer par l'intégrale de Riemann.

Or, M. Lebesgue nous montre d'abord qu'on peut démontrer directement que toute fonction continue est une fonction dérivée; puis, une série uniformément convergente de fonctions dérivées est encore une fonction dérivée.

Il n'en résulte cependant pas que pratiquement on ait ainsi construit toutes les fonctions dérivées.

Le fait fondamental, dû à M. Voltera, est qu'*il existe des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann.*

Il en résulte que l'intégrale définie, comme l'ont fait Cauchy, Duhamel et Serret, en partant de la fonction primitive, peut exister sans que l'intégrale de Riemann existe et inversement. Il y a désaccord.

Pour arriver à le faire disparaître, M. Lebesgue substitue à la définition constructive de l'intégrale définie de Riemann la définition descriptive suivante :

*Nous nous proposons d'attacher à toute fonction bornée $f(x)$, définie dans un intervalle fini (a, b), un nombre fini $\int_a^b f(x)\,dx$, que nous appelons l'*INTÉGRALE *de $f(x)$ dans (a, b) et qui satisfait aux conditions suivantes :*

1° *Quels que soient a, b, h, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx.$$

2° *Quels que soient a, b, c, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

3°

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4° *Si l'on a* $f \geqq 0$ *et* $b > a$, *on a aussi*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

5° *On a*

$$\int_0^c 1 \times dx = 1.$$

6° *Si* $f_n(x)$ *tend en croissant vers* $f(x)$, *l'intégrale de* $f_n(x)$ *tend vers celle de* $f(x)$.

Il est clair que toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens nouveau et l'auteur démontre que l'intégrale de Riemann est la *seule* solution du problème ainsi posé. Mais il y a plus, et nous apprenons que les fonctions de Riemann ne sont pas les seules qui admettent une intégrale au nouveau sens. Ce sont ces fonctions que M. Lebesgue appelle *sommables*.

Toute fonction dérivée bornée est sommable et ses intégrales indéfinies sont les fonctions primitives.

Ainsi disparaît en partie le désaccord. Il ne disparaît pas complètement, car il reste toujours des fonctions sommables bornées qui ne sont pas des dérivées et il y a des fonctions *non bornées* qui ne sont pas sommables et pour lesquelles cependant le procédé de Cauchy-Dirichlet fournit une intégrale au sens de Cauchy.

Cette rapide analyse de l'intéressant Ouvrage de M. Lebesgue suffira, je l'espère, pour donner une idée des problèmes subtils que l'auteur a étudiés, de ceux qu'il s'est posés et des résultats qu'il a obtenus.

Il s'est volontairement limité aux fonctions réelles de variables réelles et, le plus souvent, les a supposées *bornées*.

Il est probable que la question, déjà fort difficile dans ce domaine restreint, serait d'un abord encore plus ardu dans le cas de variables complexes où forcément interviendrait le chemin d'intégration.

Je doute que, dans ce cas, les six conditions posées en définition par M. Lebesgue, même modifiées, suffisent pour caractériser l'intégration. Ainsi, des conditions (3) et (6) on déduit sans peine l'égalité absolument nécessaire

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$$

où k est une constante *réelle*. Je ne vois pas que ces conditions puissent suffire à l'établir dans le cas de k imaginaire. Jadis, dans des recherches sur des transformations additives vérifiant les conditions (3) et (6), je me suis heurté à cette difficulté et n'ai pu la vaincre qu'en astreignant la fonction transformée à être régulière.

Il est vrai qu'ici on pourra tourner la difficulté en ramenant le cas de la variable imaginaire à celui de la variable réelle, *par une définition*.

Quoi qu'il en soit l'Ouvrage de M. Lebesgue est de ceux que les professeurs doivent lire et méditer. Il leur fera faire ce *travail de derrière la tête* que jadis M. Vacquant me conseillait de faire pour moi-même, dans l'intérêt de mon enseignement, mais qu'il me conseillait aussi de conserver par devers moi, pour ne présenter aux élèves que des idées simples et facilement assimilables.

Je doute, d'ailleurs, que M. Lebesgue ait écrit son Livre pour des élèves de Mathématiques spéciales, ou même pour les candidats à la Licence. CARLO BOURLET.

COURS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures; par MM. *A. Tresse* et *A. Thybaut*. — 1 vol. in-8° de III-549 pages. Paris, Armand Colin, 1904.

L'École centrale des Arts et Manufactures a été la première à modifier son programme d'admission dans le sens large et pratique dans lequel est conçu le nouveau programme de la

classe de Mathématiques spéciales élaboré, il y a un an, par une Commission interministérielle. L'Ouvrage de MM. Tresse et Thybaut correspond admirablement à cet esprit nouveau.

Graduer les difficultés, élaguer les discussions purement formelles, multiplier les exemples numériques, éviter la multiplicité des méthodes pour un même sujet, telles sont les qualités fondamentales de ce Livre.

Les deux géométries (à deux et trois dimensions) sont rédigées sur le même plan. Il nous suffira donc d'examiner rapidement la première.

Dans les *préliminaires* nous signalerons tout spécialement le principe d'homogénéité et la construction d'expressions algébriques régularisée et codifiée par une règle générale dite *de réduction*. Il est à remarquer, et l'on pourra s'en rendre compte sur maints exemples, que l'application de cette règle conduit le plus souvent aux constructions graphiques les plus simples et que beaucoup de constructions soi-disant *simplifiées* ne le sont qu'au point de vue du langage et pas du tout au point de vue graphique, qu'on ne doit jamais perdre de vue, en pareil cas.

Après l'étude de la droite et du cercle, vient immédiatement celle des courbes planes faite par ordre de difficulté croissante. On étudie d'abord les courbes dont les équations sont résolues en x et y, puis celles où x et y sont exprimées en fonction d'un paramètre t, pour n'aborder qu'en dernier lieu, et avec *tempérament*, les courbes données par une équation de la forme

$$f(x, y) = 0.$$

La théorie des asymptotes est, en particulier, présentée d'une façon fort simple, claire et rapide.

Le Livre IV est réservé à l'étude des coniques sur leurs équations réduites, précédant ainsi le Livre V réservé à l'étude des courbes du second ordre sur leur équation générale. Cet arrangement est très rationnel et progressif, car il va du simple au compliqué et facilite aux élèves la compréhension des théorèmes généraux, puisqu'ils connaissent les objets particuliers auxquels ils s'appliquent.

C'est surtout dans l'étude des quadriques que cet arrangement est favorable.

Tous ceux qui, en effet, ont jadis enseigné ces matières sui-

vant l'ancienne coutume, savent avec quelle peine les élèves de première année s'assimilaient les théories générales sur les centres, diamètres, axes, etc., qui s'appliquaient en somme à des surfaces qu'ils ne *connaissaient pas,* dont ils ignoraient la forme géométrique et les propriétés essentielles.

Sagement les auteurs ont glissé sur les longues discussions, sans portée, sur des équations générales; et dans les surfaces du second ordre ils se sont contentés d'*indiquer la possibilité* de la réduction des équations en axes rectangulaires sans même rechercher comment on trouverait les changements de coordonnées qui l'effectueraient. C'est bien suffisant.

Les auteurs ont même, par un artifice fort élégant, évité d'avoir à démontrer que l'équation en S a toutes ses racines réelles, car il leur suffit qu'il y en ait une, non nulle. Il est d'ailleurs à remarquer que, de leur méthode même, *résulte* cette réalité.

L'Ouvrage, excellent à tous points de vue, n'est malheureusement pas assez complet pour les candidats aux Écoles Polytechnique et Normale.

Il serait facile, dans un appendice ou par quelques Notes, de le compléter, et nous le désirons vivement, car nos élèves n'ont actuellement aucun Livre rédigé dans l'esprit de leur programme; et celui-ci s'y conforme d'une façon parfaite.

C. B.

MATEMATIKA TERMINARO KAJ KRESTOMATIO; par M. *Raoul Bricard.* — 1 vol. petit in-8° de 59 pages. Paris, Hachette et Cie, 1905. Prix : 0^{fr},75.

Les progrès incessants de la langue auxiliaire Esperanto sont si rapides, que le jour où les savants l'adopteront exclusivement pour la publication des grands travaux d'un intérêt universel est très proche. D'ailleurs l'existence et le succès de l'*Internacia Scienca Revuo,* revue mensuelle scientifique, rédigée tout entière en Esperanto et traitant des sujets les plus divers, prouve, par le fait, l'indiscutable appropriation de cet idiome si facile aux besoins de la Science. A vrai dire, la terminologie scientifique en Esperanto n'est pas encore fixée; mais cette terminologie est, comme on sait, déjà par elle-même si internationale que les auteurs de la *Scienca Revuo*

ont pu, sans craindre d'être incompris, employer des milliers de termes techniques puisés dans ce fonds commun et qu'ils proposent ainsi en attendant qu'une autorité compétente les sanctionne définitivement.

Malgré tout, pour éviter les légères divergences, il y a intérêt à ce que cette terminologie devienne rapidement stable, et c'est dans ce but que M. R. Bricard a rédigé son petit Ouvrage qui contient tous les termes principaux en usage dans les Mathématiques.

Il n'*impose* pas au lecteur les termes qu'il emploie, il se contente de les *proposer;* mais leur choix est si judicieux que, sans nul doute, sa terminologie, à quelques détails près, sera définitivement adoptée. En tous cas, il est certain que, dès maintenant, les mathématiciens espérantistes l'emploieront à l'exclusion de toute autre, et ainsi, bon gré mal gré, elle fera loi.

Tous ceux qui ont quelque peu étudié la question d'une langue artificielle et ont pratiqué l'Esperanto savent combien il est dangereux et téméraire de vouloir créer un dictionnaire technique de toutes pièces, mot par mot, en dehors de tout essai pratique, de tout emploi effectif dans un texte suivi.

Les mots ainsi choisis risquent fort de ne pas cadrer avec *l'esprit* de la langue, de se contrecarrer les uns les autres et surtout, ce qui serait très grave pour une langue aussi souple que l'Esperanto, de ne pas se prêter aux nombreuses et utiles dérivations qu'autorise la langue.

C'est pour éviter cet écueil qu'au lieu de poursuivre, comme M. Hoffbauer l'avait tenté, d'ailleurs avec succès, dans les suppléments de ce journal, la publication d'un dictionnaire, M. R. Bricard a élaboré une sorte de Chrestomathie mathématique composée de définitions, d'exemples et d'énoncés. rédigée tout entière en Esperanto et où le contexte explique les termes nouveaux. Ainsi l'on voit les mots en place, on juge de leur degré d'appropriation à la langue, de leur souplesse et de la commodité de leur emploi.

Bien plus, notre langage mathématique se compose non seulement de termes, mais encore d'expressions coutumières, de tournures consacrées qui ainsi sont rendues dans cet Ouvrage qui se termine par quelques textes suivis bien choisis.

Le travail était moins facile qu'on ne pourrait le croire au premier abord.

Il fallait, en premier lieu, extraire de la langue vulgaire tous les termes utilisables, en fixer le sens au point de vue scientifique, et en choisir la forme pour une utilisation facile.

Il fallait ensuite, non pas *créer,* mais *choisir* dans la terminologie des langues européennes, suivant l'internationalité acquise, les termes nouveaux indispensables soit pour désigner des objets qui ne figurent pas dans les dictionnaires courants, soit pour éviter les doubles sens, inacceptables dans une langue scientifique et logique.

Il fallait même aller plus loin : toutes nos terminologies scientifiques se sont créées peu à peu, un peu au hasard, d'une façon souvent irrationnelle. Or, ayant à donner une terminologie nouvelle dans une langue logique, on devait nécessairement essayer d'y introduire plus de régularité et de raison qu'il n'y en a dans les nôtres.

Dans cet ordre d'idées le mieux eût donc été de faire presque table rase de ce qui existe et de créer, de toutes pièces, une belle terminologie logique et philosophique, conforme à la Science qu'elle énonce.

Mais le mieux est souvent l'ennemi du bien, et, à bouleverser ainsi toutes nos habitudes, on perdrait en internationalité, en compréhension immédiate, ce que l'on gagnerait en régularité et en logique.

Voici, par exemple, le mot *déterminant* qui est absolument international et qui cependant n'a rien de raisonnable, puisqu'un déterminant ne détermine rien. Le remplacera-t-on par un terme nouveau dont on imposera la connaissance aux mathématiciens, lorsque tous comprendront, sans plus d'explications, le mot esperanto *determinanto?* Le principe de l'internationalité et de la compréhension immédiate oblige à conserver le mot *determinanto,* malgré qu'il ait l'air d'un dérivé-participe du verbe *determini.*

Ainsi l'auteur, sans cesse ballotté entre deux principes, a dû bien souvent faire des sacrifices à nos habitudes acquises. Il a, le plus souvent, presque toujours, donné le pas au terme international, et il a eu raison.

Cependant, grâce à d'ingénieux artifices, il a pu fréquemment, tout en sauvegardant la compréhension immédiate, introduire plus de régularité dans la terminologie.

L'Esperanto, comme l'Allemand, forme des mots composés dont la signification n'est pas douteuse dès qu'on connaît les

mots composants. Grâce à cette faculté précieuse il a été souvent possible d'obtenir des formes régulières, sans charger notre mémoire, là où nos langues vivantes sont absolument chaotiques.

Pour nommer les polygones nous disons en français : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc. L'irrégularité et l'illogisme de cette terminologie barbare saute aux yeux, à tel point que nos géomètres modernes ont, avec raison, dédoublé la série en : triangle, quadrangle, pentagone, etc., d'une part, et trilatère, quadrilatère, pentalatère, etc., d'autre part. C'est logique mais ce n'est pas encore régulier.

En Esperanto *angulo* signifie *angle* et M. Bricard choisit pour *côté* le mot nouveau *latero,* laissant au mot *flanko* de la langue vulgaire son sens général de *côté, flanc.* Alors, avec les mots *tri* (3), *kvar* (4), *kvin* (5), *ses* (6) de la numération, il obtient les deux séries *régulières : triangulo, kvarangulo, kvinangulo,* etc., et *trilatero, kvarlatero, kvinlatero,* etc. immédiatement compréhensibles et qui ont l'avantage de pouvoir se prolonger indéfiniment; et ainsi tout polygone d'un nombre de côtés donné aura son nom régulier en Esperanto.

Au besoin, et provisoirement, on pourra admettre des doublets. Ainsi, ayant choisi le mot *edro* pour désigner une *face,* il obtient la série normale *duedro, triedro, kvaredro, okedro, dekduedro* immédiatement compréhensible dès qu'on connaît les noms de nombres; mais il admet les *doublets* internationaux *diedro, tetraedro, oktaedro, dodekaedro* également compris à cause de leur internationalité. Certainement l'usage et la logique feront disparaître les seconds devant les premiers, de la même façon que les noms réguliers de la Chimie moderne ont étouffé les anciennes expressions de vitriol, acide muriatique, etc.

Ces exemples suffiront, je pense, à faire voir dans quel esprit à la fois *pratique* et *scientifique* M. Bricard a conçu sa terminologie. Et si j'ajoute qu'espérantiste habile, il connaît toutes les ressources et les nuances de cette langue si riche, si souple et si précise, j'espère ainsi avoir suffisamment piqué la curiosité de mes lecteurs pour inciter non seulement ceux qui connaissent déjà l'Esperanto, mais surtout ceux qui ne le connaissent pas, à lire cette excellente petite brochure. Je ne connais pas de mathématicien qui, ayant pris la peine

de parcourir une grammaire Esperanto, n'ait pas été immédiatement séduit par cette langue si appropriée à la précision et à la clarté qui conviennent à sa Science. C. B.

PRÉPARATION D'UNE ÉDITION COMPLÈTE DES ŒUVRES DE LEIBNIZ.

La Commission chargée par les Académies des Sciences et des Sciences morales et politiques de l'Institut de France de collaborer à la préparation de l'édition inter-académique des Œuvres de Leibniz prie Messieurs les directeurs de Bibliothèques et Messieurs les propriétaires de collections privées de France, Angleterre, Amérique, Pays-Bas, Suisse, Italie, Russie, qui posséderaient des manuscrits de Leibniz ou d'écrits de Leibniz de vouloir bien les lui indiquer.

Adresse : *Comité Leibniz, Institut de France, Paris.*

CORRESPONDANCE.

M. **Fontené**. — Dans la 2e série, Tome X, page 335, sous le n° 1031, on a donné la question suivante :

Trouver la condition pour que les deux perpendiculaires communes aux côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent. (A. M.)

Dans la prétendue solution qui a été donnée (2e série, t. XII, p. 474), on ne tient aucun compte du fait que les droites à considérer sont des perpendiculaires communes. (*Cf.* t. XII, p. 522, et t. XIII, p. 104.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1905).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle C de centre O et de rayon R, un point fixe K à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux FK, émanant d'un point F de la circonférence du cercle C, se réfléchit en K sur le diamètre OK et va rencontrer la circonférence de C en un point E. Soit M le milieu de la corde EF et soit AB la corde de C perpendiculaire au diamètre OK au point K.

1° Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle MAB quand F décrit la circonférence du cercle C.

2° Étudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle MAB.

3° On prend un second point K′ fixe, intérieur à C et situé sur le diamètre OK. Un rayon lumineux F′K′, parallèle à FK, se réfléchit en K′ sur ce diamètre et rencontre en E′ la circonférence du cercle C. Trouver le lieu du point de rencontre de EF et de E′F′ lorsque F et F′ se déplacent sur la circonférence du cercle C. Étudier ce lieu en supposant que K et K′ se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de KK′ reste fixe.

4° Soit M′ le milieu de E′F′. La droite MM′ rencontre le lieu de M en un nouveau point H et celui de M′ en un nouveau point H′. Étudier le cercle circonscrit au triangle HOH′ et la perpendiculaire au milieu de HH′.

5° Soit L le point qui partage HH′ dans un rapport donné λ. Démontrer que le lieu du point L est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport λ varie.

Mathématiques spéciales.

1° On donne les deux droites D, D′ définies respectivement par les équations

$$(D) \qquad y = 0, \qquad z = h,$$
$$(D') \qquad x = 0, \qquad z = -h,$$

les axes de coordonnées ox, oy, oz étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface S lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface S.

2° Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S en fonction de l'abscisse α et de l'ordonnée β des deux points N, N′ où une droite, menée par M, rencontre respectivement D et D′. Soit P le point de coordonnées α, β dans le plan xoy. Lieu du point M quand P décrit une droite quelconque du plan xoy. Étude de l'intersection de la surface S avec une quadrique quelconque qui passe par D et D′. Lieu correspondant du point P. Cas où cette intersection se décompose.

3° Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q, dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes Q_1. Trouver l'enveloppe des quadriques Q.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires ox, oy, oz, étant décrite sous la forme

$$ux + vy + wz = h,$$

les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \cot\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ et φ désignent deux paramètres arbitraires et $f(\theta, \varphi)$ une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface S en coordonnées tangentielles.

1° Démontrer que, si l'on considère sur la surface S les deux systèmes de courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que $f(\theta, \varphi)$ soit de la forme

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α étant une fonction de θ seul et β fonction de φ seul.

Dans toute la suite de l'énoncé, on supposera que $f(\theta, \varphi)$ est de cette forme.

2° Montrer que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ sont alors les lignes de courbure de la surface S et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de θ et de φ, les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface S.

3° De ces deux rayons, l'un R_1 est fonction de θ seulement; l'autre R_2 dépend en général à la fois de θ et de φ. Quelle forme doit avoir $f(\theta, \varphi)$ pour que R_2 soit aussi indépendant de φ? Montrer que, dans ce cas, la surface S est de révolution autour d'un axe parallèle à oz.

4° Établir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction $f(\theta, \varphi)$ de manière à avoir

$$R_1 = l \tang\theta, \qquad R_2 = -l \cot\theta,$$

R_1 et R_2 étant, suivant l'usage, affectés d'un signe et l désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.

5° Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre θ et φ qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface S et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ses points.

Mécanique rationnelle.

Soient $ox_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle fixe et $oxyz$ un trièdre trirectangle mobile de même sommet et de même orientation. Un corps solide S, attaché à ce second trièdre, est ainsi mobile autour du point fixe o.

Former les équations de son mouvement, sachant :

1° Que son ellipsoïde d'inertie relatif au point o est de révolution autour de oz.

2° Que le solide S, supposé non pesant, est sollicité par une force F appliquée en un point G de oz tel que $oG = a$, dirigée suivant PG, P désignant un point de oz_1 tel que $oP = b$, et égale à une fonction donnée $f(GP)$ de la distance des deux points G et P.

3° Qu'au début du mouvement, l'angle zoz_1 est droit et que la rotation instantanée du solide S se trouve dans le plan zoz_1, avec des projections sur oz et sur oz_1 égales respectivement à ω et à ω_1.

Application. — Le solide S est une sphère homogène, de centre G, de rayon a et de masse M. On a de plus

$$b = a, \qquad \omega_1 = -\frac{7}{2}\omega, \qquad f(GP) = \frac{28}{5} M a^4 \omega^2 \frac{1}{\overline{GP}^3}.$$

Exprimer les angles d'Euler en fonctions explicites du temps.

Déterminer et étudier successivement les trajectoires de l'extrémité de la rotation instantanée par rapport aux deux trièdres trirectangles oXY_1z_1 et $oXYz$, supposés orientés comme le trièdre $ox_1y_1z_1$, oX étant perpendiculaire au plan zoz_1.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1970.

(1903, p. 192.)

Le cylindre dont la section droite est la courbe représentée par l'équation intrinsèque $\rho = a - \frac{s^2}{b}$ (*a et b étant des constantes positives*) *a la propriété* CARACTÉRISTIQUE *qu'on peut tracer, sur la surface, des géodésiques à courbure constante.*

Ces courbes ont pour rayon de courbure géodésique $\sqrt{ab}$, *pour rayon de courbure absolue* $a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

(G. Pirondini.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soient

s_1, ρ_1 et ρ_g l'arc, le rayon de courbure absolue et de courbure géodésique d'une ligne L, placée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z;

θ, l'inclinaison de L, sur les génératrices;

s et ρ, l'arc et le rayon de courbure de la section droite L du cylindre.

On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \left(\frac{d\theta}{ds_1}\right)^2}, \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{d\theta}{ds_1} = \sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}.$$

Si donc

$$\rho_g = \alpha, \qquad \rho_1 = \beta,$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha\beta}\,\frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \sin\theta\,d\theta = \frac{ds}{\alpha}.$$

Et comme on déduit d'ici

$$\cos\theta = -\frac{s}{a},$$

on a

$$(1) \qquad \rho = \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}(\alpha^2 - s^2).$$

Si l'on pose

$$(2) \qquad \rho = a - \frac{s^2}{b},$$

la comparaison des équations (1), (2) donne

$$\alpha = \sqrt{ab}, \qquad \beta = a\sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

2007.

(1905, p. 96.)

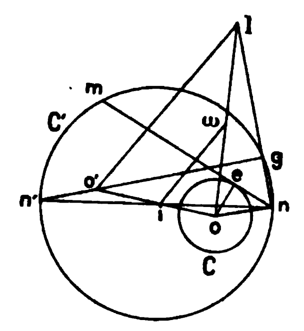
On donne dans un plan deux cercles C *et* C′; *on mène à* C *une tangente variable qui coupe en m et n le cercle* C′; *soit* ω *le centre du cercle qui passe par les points m et n et par le centre o du cercle* C : *quel est le lieu du point* ω?

(R. B.)

SOLUTION

Par M. *Canon*.

Prenons les points o' et n' symétriques de o et n par rapport au centre i du cercle C′. Menons la corde $n'o'g$, elle



est perpendiculaire à ng, comme on lui est parallèle l'angle ong est droit. La droite ng passe alors par le point l diamétralement opposé à o sur le cercle de centre ω. Le centre ω étant sur la perpendiculaire abaissée de i sur mn, le point l est aussi sur la perpendiculaire abaissée de o' sur mn.

Les triangles $o'gl$, neo sont semblables, ils donnent

$$\frac{o'l}{on} = \frac{o'g}{oe},$$

d'où

$$o'l = \frac{o'g \times on}{oe} = \frac{o'g \times o'n'}{oe} = \text{const.}$$

Le segment $o'l$ étant double du segment $i\omega$, on voit donc

que $i\omega$ est de grandeur constante et que *le lieu de* ω *est un cercle de centre* i.

Appelons R le rayon de C′, r le rayon de C, et d la distance io.

D'après ce qui vient d'être trouvé

$$o'l = \frac{R^2 - d^2}{r}$$

et alors

$$i\omega = \frac{R^2 - d^2}{2r}.$$

Remarques. — Supposons que les tangentes à C, issues de m et n, se coupent sur C′, alors elles déterminent avec mn un triangle inscrit à C′ et circonscrit à C. On sait qu'alors

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

par suite

$$i\omega = R,$$

on retrouve ainsi un résultat connu.

Si l'on transforme par inversion l'énoncé de la question proposée, en prenant le point o pour pôle, on obtient cette propriété :

Un cercle D *de grandeur invariable tourne autour d'un de ses points* o, *le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de* D *et d'un cercle fixe est un cercle.*

La démonstration directe est très simple, elle s'applique à ce théorème plus général :

Un cercle D *de grandeur invariable tourne autour d'un point arbitraire* o, *le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de* D *et d'un cercle fixe est un cercle.*

Transformé par inversion, en mettant le pôle au point o, ce théorème donne le suivant :

Soient C′, D *deux cercles qui se coupent en* m, n, *et* ω *le centre du cercle qui passe par* m, n *et un point arbi-*

traire o : ce point ω décrit un cercle lorsque D tourne autour de o, sans varier de grandeur.

Autres solutions par MM. **Abramescu**, **Barisien**, **V. Maës**, **Parrod**, **Retali** et **Troin**.

2008.

(1895, p. 96.)

On considère un triangle fixe ABC, *une direction* (Δ) *et un point* O. *On tire* AO, BO, CO. *On mène par* A *la droite* (α) *symétrique de* AO *par rapport à la direction* (Δ). *On mène par* B *et* C *les droites* (β) *et* (γ) *analogues à* (α).

1° (Δ) *étant donnée, le lieu du point* O *tel que les droites* (α), (β), (γ) *correspondantes concourent en* O′ *est l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle et dont* (Δ) *est une direction asymptotique ;*

2° O *étant l'orthocentre du triangle,* O′ *est sur le cercle circonscrit ;*

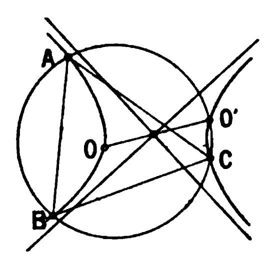
3° (Δ) *étant donnée, trouver l'enveloppe de* OO′.

(L. Troin.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Étant donnés dans un plan un triangle fixe ABC, deux



points fixes Δ, Δ′ et un sixième point O, si les droites α, β, γ sont respectivement conjuguées harmoniques de AO, BO, CO par rapport aux couples du rayon AΔ, AΔ′; BΔ, BΔ′; CΔ, CΔ′ et concourent en même point O′, les trois faisceaux

A($\Delta\Delta'$OO'), B($\Delta\Delta'$OO'), C($\Delta\Delta'$OO') sont harmoniques et par suite les deux points O, O' sont conjugués harmoniques par rapport à $\Delta\Delta'$ sur la conique (ABC$\Delta\Delta'$). Si Δ et Δ' sont à l'infini, orthogonales en direction, la conique est une hyperbole équilatère; les points O, O' sont les extrémités d'un diamètre variable et par suite l'enveloppe de OO' est le centre.

Si le point O de l'hyperbole équilatère est l'orthocentre du triangle inscrit ABC, le point diamétralement opposé est sur le cercle (ABC); théorème connu qui découle d'ailleurs de l'égalité des angles BAC, BO'C.

Autres solutions de MM. Letierce, Parrod et Abramescu.

2009.

(1905, p. 96.)

On donne un quadrilatère ABCD *inscrit dans une conique, et un point arbitraire* O. *Sur la tangente en* A *à la conique, on prend le point* E *où cette droite est rencontrée par le côté* CB; *on mène la droite* OE *qui coupe* AB *en* M. *Au moyen du côté* CD *on obtient de même le point* N *sur* AD. *Quelle est l'enveloppe de la droite* MN, *lorsque* C *décrit la conique?* (*Canon.*)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Les points E et F sont homographiques, par suite M et N; quand le point C est en A, M et N sont confondus en A; donc MN passe par un point fixe.

Remarques. — La droite passe par un point fixe quelle que soit la droite donnée passant par A et que ce point soit situé ou non sur la conique, l'enveloppe est une conique tangente aux droites AD et AB.

Autres solutions par MM. Abramescu, V. Maës, Retali.

TABLE DES MATIÈRES.

Juillet 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis,

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

AOUT 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris :
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[P6f]

REPRÉSENTATION DE CERCLES PAR DES POINTS;

PAR MM. A. SAINTE-LAGUË ET J. HAAG.

I. — DÉFINITION DE LA REPRÉSENTATION.

Nous ne voulons pas traiter ici le problème le plus général de la représentation par des points des cercles du plan ou même des sphères de l'espace. Cette étude a été faite en particulier par MM. Darboux et Sophus Lie. Nous voulons montrer simplement, sur un cas particulier, comment on peut rattacher aux propriétés des cercles de nombreuses propriétés des points de l'espace ou inversement.

Soient π le plan considéré et P un paraboloïde de révolution tangent au plan π en son sommet O. Si l'on prend un cercle C quelconque du plan, le cylindre droit ayant ce cercle pour base coupe le paraboloïde suivant une conique dont le plan a pour pôle c par rapport au paraboloïde; nous dirons que c est le point représentatif du cercle C ou, plus simplement, que c est l'axial du cercle C.

On obtient encore l'axial d'un cercle en portant sur l'axe de ce cercle, à partir de son centre, un segment égal au quotient de la puissance de O par rapport au cercle C par le double du paramètre du paraboloïde, ce segment étant au-dessus de π, si la puissance considérée est positive, au-dessous dans le cas contraire.

II. — Familles simples de cercles.

On verrait très aisément à quoi correspondent les familles les plus simples de cercles. Nous ne ferons qu'énoncer les principaux résultats.

Les cercles-droites ont leurs axiaux à l'infini et inversement. Les cercles-points ont leurs axiaux sur le paraboloïde P et inversement.

A des cercles concentriques correspondent les points de leur axe commun, les points de cet axe intérieurs au paraboloïde correspondant d'ailleurs à des cercles imaginaires.

Les cercles orthogonaux à un cercle fixe ω de centre O ont leurs axiaux sur le plan coupant P suivant un cercle égal à ω, plan parallèle au plan π.

III. — Cercles tangents.

Si deux cercles sont tangents, leurs axiaux sont sur une tangente à P, le point de contact de cette droite avec P étant projeté sur π au point de contact des deux cercles. La position relative des axiaux et du point de contact dans l'espace indique d'ailleurs la nature du contact.

Les cercles tangents au cercle A d'axial α ont donc leurs points représentatifs sur le cône de sommet α circonscrit au paraboloïde, les points de ce cône situés sur P correspondant aux points de A et les points à l'infini aux tangentes à A.

En particulier, les cercles passant par un point fixe ont leurs axiaux dans un plan tangent à P. Les réciproques de ces diverses propriétés sont d'ailleurs exactes.

IV. — Cercles homothétiques.

Les axiaux des cercles homothétiques à un cercle donné A par rapport à un point ω sont dans le plan vertical contenant l'axe de A et le point ω. Leur lieu, dans ce plan, est une parabole définie par la direction de son axe qui est vertical, par l'axial de A et par le point où la verticale de ω coupe le paraboloïde P, point où elle lui est tangente.

Prenons les deux droites auxquelles restent tangents tous les cercles considérés. Les axiaux des cercles tangents à une droite étant sur un cylindre circonscrit au paraboloïde, on voit que, ici, on aura à prendre une des deux paraboles d'axe vertical et tangentes à P qui composent l'intersection de ces cylindres. Le choix sera aisé en remarquant que les deux familles de cercles tangents aux deux droites se distinguent par le lieu de leurs centres.

La définition de l'axial d'un cercle au moyen de sa cote montre que l'on a la propriété suivante :

Si θ est le cercle pour lequel la puissance de O est minimum (cercle dont l'axial est au sommet de la parabole), deux cercles de même puissance par rapport à O ont leurs centres équidistants de celui du cercle θ.

V. — Cercles orthogonaux.

A deux cercles orthogonaux correspondent deux points conjugués par rapport au paraboloïde P (*fig.* 1).

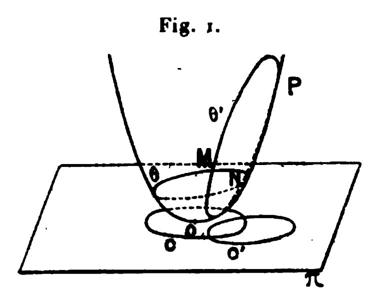
Prenons, en effet, les deux cercles orthogonaux C et C′ et soient θ et θ' les intersections avec P des cylindres les admettant pour sections droites. M et N étant les points communs à θ et θ', la tangente à θ en M coupe l'axe

du cylindre C′ et coupe aussi la droite D conjuguée de MN par rapport à P. Or D passe par le pôle du plan de θ′ par rapport à P, qui est sur l'axe de C′; on en déduit que la tangente en M à θ passe par ce pôle qui se trouve ainsi dans le plan θ.

Les cercles orthogonaux à un cercle C d'axial *c* ont leurs axiaux dans le plan polaire de *c*, et inversement. Ici encore on distingue immédiatement les cercles réels des cercles imaginaires.

Les cercles d'un faisceau ont leurs axiaux sur une

Fig. 1.



droite et les cercles du faisceau orthogonal ont les leurs sur la droite conjuguée de la première par rapport au paraboloïde.

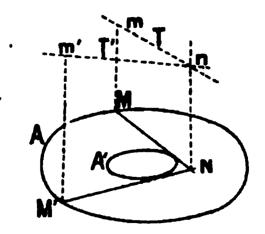
VI. — Cercles coupant, sous un angle donné, un cercle donné.

Les cercles coupant un cercle A sous un angle V ont leurs axiaux sur une quadrique réglée circonscrite à P tout le long de la conique α projetée sur le plan donné suivant le cercle A.

Considérons les cercles coupant sous l'angle V au point M le cercle A; leurs centres sont sur une droite MN faisant avec le rayon de M l'angle V et tan-

gente, par suite, à un cercle A′ indépendant du point M considéré (*fig.* 2). Ces cercles ont leurs axiaux sur la

Fig. 2.



tangente T au paraboloïde au point m où la verticale de M le coupe et située dans le plan vertical MNm.

On obtient ainsi deux familles de génératrices pour la surface lieu de ces droites, suivant qu'on prend l'une ou l'autre des tangentes issues de M au cercle A′. Nous allons voir que deux tangentes de familles différentes T et T′ se coupent. Soit M′N la seconde tangente à A′ fournissant T′; T et T′ coupent toutes deux la verticale du point N et, de plus, la droite conjuguée de mm'. Cette dernière étant le lieu des axiaux des cercles passant par M et M′ coupe également cette verticale. Donc T et T′ se coupent en un point n de cette verticale.

On voit que, si l'on prend trois génératrices d'un même système, toutes les génératrices de l'autre système les coupent. Le lieu de ces génératrices est donc une quadrique dont on a immédiatement les propriétés ci-dessus.

Si nous considérons l'intersection de la quadrique Q et de π, nous voyons que :

Les cercles coupant le cercle A *sous l'angle* V *et qui passent par un point fixe* O *ont leurs centres sur une*

conique dont un foyer est en O. Il en est de même plus généralement de tous les cercles ayant même puissance par rapport à un point fixe.

Les cas particuliers où V est nul ou égal à un droit redonneraient des propriétés connues.

Si l'on considère l'ensemble des cercles C coupant deux cercles donnés A et A′ sous des angles donnés V et V′, il existe une infinité de cercles coupant tous les cercles C sous un angle constant, ces cercles font partie d'un faisceau ponctuel.

Il suffit, pour le voir, de remarquer que les quadriques passant par l'intersection des quadriques Q et Q′, lieu des axiaux des cercles C coupant A sous l'angle V ou A′ sous l'angle V′, sont toutes circonscrites à P le long de coniques ayant en commun deux points M et N. On en déduit que les cercles correspondant à ces diverses quadriques et qui coupent sous des angles constants les cercles C ont leurs axiaux sur la droite conjuguée de MN par rapport à P.

Il y a, en particulier, deux cercles tangents à tous les cercles C. En remarquant que l'intersection des deux quadriques Q et Q′ se compose de deux coniques, on voit d'ailleurs que les cercles C se groupent en deux familles. Il y a un cercle orthogonal à chacune des deux familles. Le lieu des centres des cercles d'une même famille est une conique.

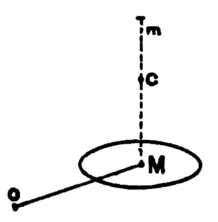
VII. — Cercle de rayon donné.

Le lieu des axiaux des cercles ayant un rayon R est un paraboloïde de révolution déduit de P par une translation parallèle à l'axe de ce dernier.

Prenons un cercle C de centre M et soit d la distance OM, la cote de l'axial du cercle-point M est

égale au quotient de d^2 par le double paramètre de P (*fig.* 3). Si l'on cherche la cote de l'axial de C, on voit

Fig. 3.



que la différence de cote *mc* est égale au quotient de R^2 par le même double paramètre.

On pourrait transformer des propriétés bien connues des cercles de rayons égaux pour en déduire des propriétés des paraboloïdes.

Considérons, par exemple, le paraboloïde déduit de P par une translation quelconque parallèle à l'axe et α étant un point arbitraire de P′ remarquons que le cône circonscrit à P de sommet α coupe P′ suivant une certaine conique θ' dont le plan coupe P suivant une conique homothétique et concentrique θ.

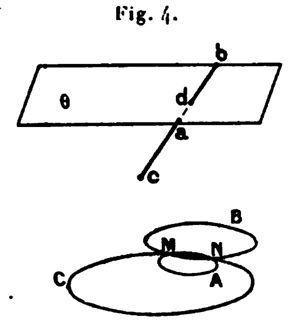
La propriété bien connue de l'existence de six cercles de même rayon tangents à un autre cercle ayant encore le même rayon montre ici que les deux coniques θ et θ' admettent un hexagone, circonscrit à θ et inscrit dans la conique θ'.

VIII. — Inversion.

Prenons deux cercles A et B du plan π inverses l'un de l'autre par rapport au cercle d'inversion C. *a*, *b*, *c* étant les axiaux de ces trois cercles, ces trois points seront en ligne droite, et, si *d* désigne le point où cette droite coupe le plan polaire θ de *c* par rapport à P, les segments *cd* et *ab* sont conjugués harmoniques.

Pour le montrer, il suffit de considérer les cercles A, B, C et le cercle orthogonal à C aux points où A et B le coupent : M, N (*fig.* 4). On n'a plus qu'à

Fig. 4.



remarquer que les centres de ces quatre cercles forment une division harmonique sur la perpendiculaire à MN en son milieu.

On voit que, dans le plan, l'inversion des cercles par rapport au cercle C se ramène dans l'espace à une homologie de centre c et de plan θ. Ceci montre, par exemple, que l'ensemble des cercles coupant le cercle C sous un angle donné se reproduit identique à lui-même par l'inversion, etc.

IX. — Courbes analLagmatiques.

Prenons une courbe quelconque M et considérons-la comme un lieu de centres de cercles nuls : les axiaux de ces cercles donnent une courbe m, projection cylindrique de M sur le paraboloïde P. Prenons de même la courbe M′ inverse par rapport au cercle C de la précédente et sa projection m' sur P. D'après ce qui précède, m' sera la seconde courbe d'intersection de P avec le cône de sommet c ayant pour base la courbe m.

Si, plus généralement, nous considérons la courbe

d'intersection avec P *d'un cône quelconque de sommet c, elle sera projetée sur le plan* π *suivant une courbe admettant pour cercle d'inversion le cercle* C *d'axial c, courbe qui sera donc anallagmatique.*

X. — Quartiques bicirculaires.

En particulier, une biquadratique gauche tracée sur P pouvant être placée de quatre manières différentes sur un cône du second degré, donnera, par projection, une quartique qui sera quatre fois anallagmatique.

On peut remarquer l'analogie de ce procédé d'étude des quartiques bicirculaires avec celui qu'indique Duporcq dans ses *Éléments de Géométrie moderne.* Nous verrons plus loin à quoi tient cette analogie. On retrouverait d'ailleurs aisément toutes les propriétés des quartiques bicirculaires ([1]).

Montrons d'abord l'existence des coniques défé-

([1]) Les théories précédentes permettent d'avoir aisément la condition pour qu'une quartique ait un point double à distance finie.

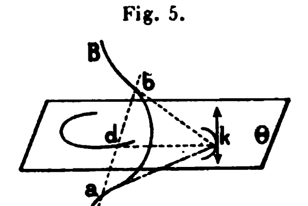
Si l'on considère les cercles dont les axiaux sont sur une conique fixe θ, ces cercles sont orthogonaux au cercle fixe ayant pour axial le pôle du plan de θ par rapport à P, et leur enveloppe est évidemment une quartique bicirculaire, projection, comme on le sait, d'une biquadratique gauche tracée sur P.

Si l'on veut que cette quartique circulaire ait un point double à distance finie, il faut et il suffit que la biquadratique ait un point double, aucune corde d'une courbe tracée sur P ne pouvant être verticale. Ceci exige que la conique θ soit tangente à P, le cône polaire réciproque de θ qui contient la biquadratique étant alors tangent au paraboloïde. Dans ce cas, la déférente est dans le plan π et tangente au cercle directeur correspondant.

On verrait aussi qu'une quartique bicirculaire se décompose en deux cercles si le cercle directeur est bitangent à la déférente qui lui correspond et l'on retrouve alors l'ensemble des cercles tangents à deux cercles fixes.

rentes. Soit B la biquadratique gauche sur P. Prenons deux points *a* et *b* de B en ligne droite avec un des sommets de cône *c* et le point *d* où *ab* coupe le plan polaire θ de *c* par rapport à P (*fig.* 5). Les tangentes en

Fig. 5.



a et *b* à B se coupent en un point *k* de la tangente, au lieu de *d*, en *d*. Le cercle d'axial *k* est donc bitangent à la quartique projection de B sur π, il est de plus orthogonal au cercle d'inversion d'axial *c* et son centre décrit une conique, car le lieu de *k* dans θ n'est autre que l'enveloppe des droites conjuguées de *ab* par rapport au paraboloïde, enveloppe qui est une conique, polaire réciproque du cône *c*. Ce mode de génération de la quartique montre bien qu'elle est bicirculaire, comme on le voit en remarquant que les quatre points de B situés dans le plan de l'infini sont deux à deux sur les génératrices de P dans ce plan, lesquelles passent, d'ailleurs, par les points cycliques du plan π.

Les quatre cercles directeurs sont orthogonaux deux à deux, car leurs quatre axiaux *c* sont dans l'espace les sommets d'un tétraèdre conjugué commun aux cônes et au paraboloïde.

Les quatre déférentes sont homofocales, car si nous prenons les quatre points communs aux cônes dans le plan de l'infini, leurs plans polaires sont isotropes et deux à deux parallèles, deux contenant une des génératrices de P et les deux autres la seconde. Donc les

quatre coniques d'intersection des cônes avec le plan de l'infini donnent par polaires réciproques quatre cylindres qui sont les cylindres projetant les déférentes et qui admettent en commun quatre plans tangents isotropes.

XI. — Courbes en général.

Nous venons de considérer une courbe comme lieu de cercles-points. On peut associer de façons très diverses des cercles à une courbe quelconque.

Si l'on considère, par exemple, les cercles passant par l'origine et tangents ou normaux à la courbe, cercles dont l'axial est confondu avec le centre, on obtient des propriétés des podaires ou des antipodaires de la courbe.

En cherchant quels sont les axiaux des cercles tangents à la courbe M en un point donné ou orthogonaux en ce point, on voit que deux faisceaux de courbes conjuguées sur P donnent, par projection, deux faisceaux de courbes orthogonales. C'est un cas particulier de ce fait facile à vérifier, en partant de deux faisceaux de cercles orthogonaux, que deux droites conjuguées par rapport au paraboloïde se projettent sur π suivant deux droites rectangulaires.

Si m est la projection de M *sur* P, *l'arête de rebroussement* R *de la surface développable donnée par les plans tangents à* P *tout le long de m a pour projection sur le plan* π *la développée de* M.

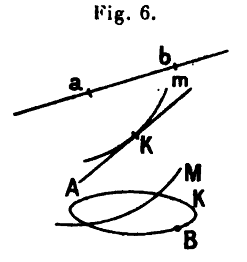
En effet, le cercle de courbure en un point K de M est défini par la condition de passer par trois points infiniment voisins de cette courbe et a son axial au point d'intersection des trois plans tangents en trois points infiniment voisins du point k de la courbe m.

Indiquons encore la propriété suivante :

Si un point décrit dans l'espace une courbe m quelconque, le cercle dont il est l'axial a son centre qui décrit la courbe M *projection de m et il enveloppe une courbe que l'on a en projetant sur π l'intersection avec* P *de la développable polaire réciproque de m par rapport à* P.

Soit, en effet, k un point de m; en prenant le point infiniment voisin, on voit que le cercle K d'axial k et le cercle infiniment voisin ont, en commun, deux points A et B, c'est-à-dire sont tangents à deux cercles-points qui ont pour axiaux les deux points a, b où P est coupé par la droite conjuguée de la corde joignant les deux points de m que l'on avait considérés (*fig.* 6).

Fig. 6.



Il suffit de passer à la limite pour obtenir l'énoncé ci-dessus.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie des courbes en général, car elle nous éloignerait trop de l'étude des cercles.

XII. — Quadriques.

Si l'on considère les cercles dont les axiaux décrivent une quadrique quelconque Q, on voit qu'on peut les définir géométriquement par la condition qu'il y en ait

deux, et deux seulement, ayant pour centre un point arbitraire du plan, ou, d'une façon plus précise, que par deux points arbitraires du plan il en passe deux, et deux seulement.

La vérification des diverses propriétés suivantes d'un tel ensemble, que l'on peut appeler *ensemble du second ordre,* se ferait immédiatement d'après ce qui précède.

Les cercles de l'ensemble coupant sous l'angle V *un cercle donné ont leurs centres sur une quadrique. Si cet angle est droit, on a une conique et leur enveloppe est alors une quadrique bicirculaire.*

Les cercles passant par un point fixe ont leurs centres sur une conique. Les cercles de rayon donné ont leurs centres sur une quadrique.

Les faisceaux de cercles de l'ensemble qui correspondent aux génératrices de la quadrique ont leur ligne des centres qui enveloppe une conique, il en est d'ailleurs de même de leur axe radical commun.

La transformation par inversion par rapport à un cercle quelconque fait correspondre à un ensemble du second ordre un autre ensemble de même ordre. Il y a d'ailleurs quatre cercles d'inversion par rapport auxquels l'ensemble est anallagmatique, c'est-à-dire se transforme en lui-même. Ce sont dans l'espace les quatre sommets conjugués communs à la quadrique et au paraboloïde.

On traiterait aisément la question des cercles communs à deux ensembles et l'on pourrait plus généralement étudier des ensembles d'un ordre quelconque, mais cette recherche nous entraînerait trop loin.

Faisons encore une remarque : on voit que dans le cas où la quadrique est un cône l'ensemble est suscep-

tible d'être défini simplement comme l'ensemble des cercles coupant un cercle fixe donné de telle façon que la corde commune soit tangente à une conique fixe donnée (*voir* la note de la page 345).

XIII. — Autres modes de représentation d'un plan.

On généralise immédiatement ce qui précède en prenant au lieu d'un paraboloïde de révolution une quadrique de révolution quelconque d'axe perpendiculaire au plan donné.

Si S et S' sont les deux sommets de la quadrique, tout cercle du plan donne deux cônes de sommets S et S' ayant ce cercle pour base (*fig.* 7). Si nous pre-

Fig. 7.

nous un de ces cônes, il coupe la quadrique suivant une conique θ dont le pôle *c* peut être considéré comme le point représentatif du cercle C. D'ailleurs la droite *c*S passe par le centre de C.

Nous dirons seulement quelques mots du cas particulier où la quadrique considérée est une sphère. La conique θ est ici un cercle qui a pour projection stéréographique le cercle C. Les propriétés de cette projection ont été données par exemple par Duporcq dans ses *Éléments de Géométrie moderne*

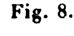
XIV. — Application aux problèmes de Gergonne et de Steiner.

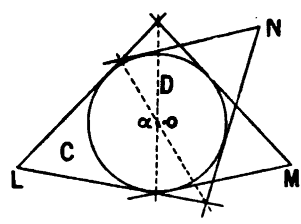
La notion d'axial dans le cas d'une sphère permet d'avoir des solutions peut-être un peu plus simples que les solutions classiques pour ces deux problèmes.

Deux cercles tangents ayant leurs axiaux sur une tangente à la sphère et deux cercles orthogonaux ayant leurs axiaux conjugués, la recherche des points communs à trois cônes à laquelle se ramène le problème de Gergonne va se trouver considérablement simplifiée :

Prenons, comme nous le ferons aussi pour le problème de Steiner, pour plan de figure le plan équatorial de la sphère, le sommet de la projection stéréographique étant par exemple au pôle le plus bas. Précisons même davantage en supposant que le cercle équatorial soit le cercle orthogonal aux trois cercles donnés. Les axiaux des cercles donnés sont alors leurs centres mêmes dans le plan de figure.

Ceci posé, soient L, M, N les centres des trois cercles donnés (*fig.* 8). Le cône de sommet L par exemple,


Fig. 8.

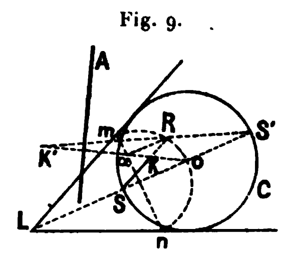


circonscrit à la sphère, a pour contour apparent sur le plan de figure les tangentes L au cercle C. Les intersections deux à deux de ces cônes sont des coniques

dans des plans verticaux dont les traces telles que D sur le plan de figure sont faciles à obtenir. Les huit points communs aux trois cônes sont deux à deux symétriques par rapport au plan de figure et ont quatre projections sur ce plan que l'on a en faisant couper les droites telles que D.

Soit α un de ces points que nous considérerons par exemple comme étant la projection de deux axiaux pris sur le cône L. Il reste à avoir les deux cercles correspondants; tous les cercles dont les axiaux sont sur la verticale de α ayant pour axe radical avec C la polaire A de α il suffira d'avoir les centres K et K′ des deux cercles d'axiaux k et k' sur la verticale de α (*fig.* 9). On a la

Fig. 9.



cote de k en menant mn perpendiculaire à OL par α et rabattant ce point k en R sur le cercle de diamètre mn. Le centre K cherché partageant Oα dans le rapport de la cote αR au rayon de la sphère, il suffira de mener RS ou RS′ pour avoir en K et K′ les deux centres cherchés.

On peut remarquer, comme d'ailleurs ci-dessous, dans le problème de Steiner ou dans tout autre problème analogue, que l'existence de la symétrie qu'il y a par rapport au plan de figure donne immédiatement une propriété des cercles cherchés : ils ont deux à deux même axe radical avec le cercle C.

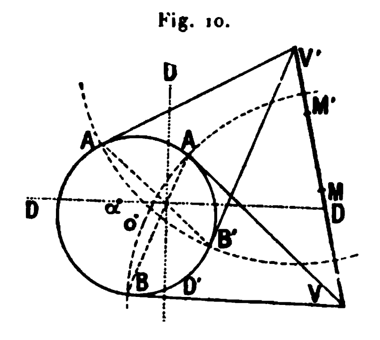
Les cercles coupant un cercle donné V sous l'angle V

ayant leurs centres sur une quadrique circonscrite à la sphère, on va se trouver ramené pour le problème de Steiner à chercher les points communs à trois quadriques.

Prenons toujours pour cercle équatorial le cercle C orthogonal aux trois cercles donnés, ayant pour axiaux leurs centres V, V′, V″.

La quadrique relative au cercle V a pour section sur le plan donné une conique qu'il est inutile de tracer et qui est bitangente à C en A et B. Les plans des coniques d'intersection ont pour traces des droites telles que D et D′ formant faisceau harmonique avec AB et A′B′ et que nous allons déterminer (*fig.* 10). Coupons les deux

Fig. 10.

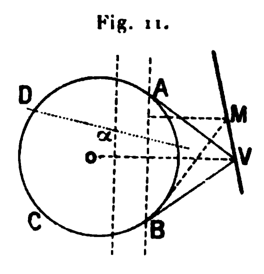


quadriques qui nous donnent ces droites par une droite que nous prendrons en VV′. Si l'on connaissait les points MN et M′N′ où cette droite coupe les deux coniques de contour apparent, d'après le théorème de Desargues, D et D′ couperaient la droite VV′ en deux points formant division harmonique avec MN et M′N′. Or, M et N se déterminent aisément en les considérant comme les axiaux ou les centres de deux cercles coupant le cercle V sous l'angle V, de centres sur VV′ et orthogonaux à C. Les deux cercles M et N passant alors

par deux points fixes qui sont les points communs aux cercles V et V′, et coupant V sous un angle connu, s'obtiennent rapidement.

On en déduirait, comme dans le problème de Gergonne, la construction d'un point α et l'on achèvera la solution comme ci-dessus, si l'on peut avoir les points m, n où la perpendiculaire en α à OV coupe la conique de contour apparent de la quadrique relative à V (*fig.* 11). Remarquons que cette conique étant bitan-

Fig. 11.



gente au cercle C en A et B tout point M de cette conique donne un rapport constant pour sa distance à AB et pour la longueur de sa tangente à C; la distance de m à AB étant connue et le rapport constant dont on vient de parler l'étant également puisqu'on a déjà en M et N deux points particuliers de cette conique, on aura très aisément m et n, et l'on achèvera sans peine la solution comme pour le problème de Gergonne.

On peut toutes les fois que α est extérieur au cercle C abréger les dernières constructions en remarquant que les cercles cherchés passant par deux points fixes réels et devant couper sous l'angle V un cercle donné se déterminent très aisément en transformant la figure par inversion par rapport à un des deux points réels connus, qui sont, comme on l'a vu, les points où la polaire de α coupe C.

Cette remarque s'applique évidemment de même au problème de Gergonne.

XV. — Extensions diverses.

L'étude des cercles du plan correspond, comme on sait, en transformant par polaires réciproques par rapport à un cercle quelconque, à l'étude des coniques ayant un foyer commun qui est le centre du cercle par rapport auquel on fait la transformation.

Mais il existe d'autres extensions immédiates. C'est ainsi qu'on étudierait de façon analogue les sphères en les représentant par des points de l'espace à quatre dimensions, ou plus simplement qu'on étudierait les segments portés par une droite en leur associant des points d'un plan fixe passant par la droite au moyen d'une conique fixe de ce plan, ayant un axe perpendiculaire à la droite portant les segments considérés. Cette étude est d'ailleurs assez intéressante, car elle permet d'utiliser un très grand nombre de propriétés des courbes planes.

[A1b et I1]

UN THÉORÈME RELATIF AUX VALEURS MOYENNES;

Par M. T. HAYASHI, à Tokio.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XXVI, p. 281-284), M. Durand a prouvé un théorème relatif aux valeurs moyennes et M. G. Darboux en a donné une autre démonstration.

Voici une proposition analogue.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres positifs tous diffé-

rents, et soit P_n^r le produit de toutes les sommes de r quelconques de ces n nombres. Il y a

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

telles sommes. Posons

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} = N_r.$$

On a alors

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_r < N_{r+1} < \ldots < N_n.$$

Supposons, en effet, que le théorème soit vrai pour n nombres, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} < \frac{(P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{r+1} \qquad (r \leqq n-1),$$

et remplaçons, dans cette inégalité, successivement a_1, a_2, ..., a_n par a_{n+1}. Multiplions les $n+1$ inégalités ainsi obtenues (y compris la précédente) membres à membres, et nous obtenons

$$\frac{(\Pi P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r^{n+1}} < \frac{(\Pi P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}} \qquad (r \leqq n-1).$$

Or, d'une part, ΠP_n^r comprend $(n+1)C_n^r$ facteurs, et, d'autre part, le produit contient symétriquement tous les facteurs de P_{n+1}^r qui sont au nombre de C_{n+1}^r. On a donc

$$\Pi P_n^r = (P_{n+1}^r)^{\frac{(n+1)C_n^r}{C_{n+1}^r}},$$

et, d'une façon analogue,

$$\Pi P_n^{r+1} = (P_{n+1}^{r+1})^{\frac{(n+1)C_n^{r+1}}{C_{n+1}^{r+1}}}.$$

On en conclut que

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r}}}}{r^{n+1}} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}},$$

et, par suite,

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r}}}}{r} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{r+1},$$

lorsque $r \leqq n-1$.

Cette inégalité est, d'ailleurs, évidente lorsque $r=n$.

Le théorème étant vrai pour $n=2$ est, par suite, général.

[M²1a]

DÉTERMINATION D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

Par M. LANCELOT.

Soit une surface algébrique de degré m. Son équation, en coordonnées homogènes,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

a pour premier membre un polynome homogène en x, y, z, t, comprenant un nombre de termes égal à Γ_4^m (nombre des combinaisons avec répétition de quatre lettres m à m). Il comprend donc

$$\Gamma_4^m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

paramètres homogènes ou

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{m(m^2+6m+11)}{6}$$

coefficients non homogènes.

1° Il faut donc, pour déterminer une surface,

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6}$$

conditions simples (se traduisant par une seule relation entre les coefficients) et indépendantes les unes des autres.

Par exemple, par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6}$ points passe, en général, une surface de degré m, et une seule.

2° Par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6} - 1$ points passent une infinité de surfaces dépendant d'un paramètre. Les équations qui expriment que la surface de degré m passe par les points donnés étant linéaires, l'équation générale de ces surfaces est de la forme

$$f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) = 0,$$

et ces surfaces passent toutes par une courbe qui est, en général, de degré m^2, intersection des surfaces

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0.$$

Il s'ensuit que la courbe algébrique de degré m^2, intersection de deux surfaces de degré m, est déterminée par la connaissance de

$$\frac{m(m^2+6m+11)-6}{6} = \frac{m^3+6m^2+11m-6}{6} \text{ points.}$$

Car, par tous ces points, il passe une infinité de surfaces de degré m ayant en commun une courbe de degré m^2, et une seule.

3° Par $\frac{m(m^2+6m+11)}{6} - 2$ points passent une infinité de surfaces de degré m dépendant linéairement

de deux paramètres

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0.$$

Ces surfaces ont en commun m^3 points : les points d'intersection des trois surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. On a donc le théorème suivant :

Toute surface de degré m passant par

$$\frac{m^3 + 6m^2 + 11m - 12}{6} \text{ points}$$

passe en plus par

$$m^3 - \frac{m^3 + 6m^2 + 11m - 12}{6} = \frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$$

autres points.

Isolons, parmi le système à deux paramètres de surfaces passant par les $\frac{m(m^2 + 6m + 11)}{6} - 2$ points donnés, un système à un seul paramètre. Toutes ces surfaces ont en commun une infinité de points formant une courbe de degré m^2. Comme elles vont toutes passer par les $\frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$ autres points, il s'ensuit que cette courbe de degré m^2 passe également par ces points.

On voit donc que :

1° Par $\frac{m(m^2 + 6m + 11)}{6} - 2$ points il passe une infinité de courbes de degré m^2, intersections de deux surfaces d'ordre m ; toutes ces courbes ont en plus

$$\frac{5m^3 - 6m^2 - 11m + 12}{6}$$

autres points fixes.

2° Toute surface d'ordre m coupant une courbe de

degré m^2, intersection de deux surfaces d'ordre m, en

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} - 2 \text{ points fixes,}$$

la coupe en

$$\frac{5m^3-6m^2-11m+12}{6}$$

autres points fixes.

Exemple. — 1° $m = 2$:

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} = \frac{2(4+12+11)}{6} = 9.$$

Par 9 points passe, en général, une quadrique, et une seule.

Par 8 points passe, en général, un faisceau de quadriques ayant en commun une biquadratique gauche. Une courbe gauche du quatrième degré, intersection de deux quadriques, est déterminée par 8 points.

Par 7 points passe, en général, un réseau de quadriques ayant 8 points communs. Toute quadrique passant par 7 points passe également par un huitième.

2° $m = 3$:

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} = \frac{3(9+18+11)}{6} = 19.$$

Par 19 points passe, en général, une surface du troisième degré, et une seule.

Par 18 points passe, en général, un faisceau de surfaces cubiques ayant en commun une courbe du neuvième degré.

Par 17 points passe, en général, un réseau de surfaces cubiques ayant 27 points communs. Toute surface cubique passant par 17 points passe en outre par 10 points fixes différents des 17 premiers.

Remarque. — On voit que (de même que pour la détermination des courbes planes) la donnée d'un certain nombre de points peut ne pas donner ce même nombre de conditions distinctes, la donnée de quelques-uns d'entre eux pouvant résulter nécessairement de la donnée de quelques autres.

Exemple de points non distincts pour la détermination d'une surface. — On sait qu'une surface de degré m et une courbe de degré p se coupent en mp points; et que, par suite, si une surface de degré m passe par $(mp+1)$ points situés sur une courbe d'ordre p, elle la contient tout entière.

La donnée de ces $(mp+1)$ points entraîne donc celle d'une infinité d'autres comprenant tous les points de la courbe.

Ainsi, la donnée de 3 points situés sur une même droite entraîne, pour une quadrique, celle de tous les points de la droite.

La donnée de 7 points d'une cubique gauche entraîne, pour une quadrique, celle de tous les points de cette cubique.

On a vu que, en général, une quadrique passant par 7 points passe par un huitième point seulement; on a donc une exception à cette règle générale et l'on est amené à distinguer deux sortes de réseaux linéaires de quadriques, les unes ayant 8 points fixes et les autres passant par une cubique gauche.

On voit en plus que, par 7 points, ne passe aucune cubique gauche en général.

Théorème. — *Si, sur les m^3 points d'intersection de trois surfaces algébriques de degré m, m^2p sont situés sur une surface de degré p inférieur à m, les*

$m^2(m - p)$ autres sont situés sur une surface de degré $m - p$.

Car, si $m^2(m - p)$ était plus petit que

$$\frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6} - 1$$

(ou égal), par ces $m^2(m - p)$ points on pourrait toujours faire passer une infinité de surfaces de degré $m - p$ (ou une seule) et le théorème serait évident.

Si

$$m^2(m-p) > \frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6} - 1,$$

prenons parmi les $m^2(m - p)$ points en question ce nombre de points. Ils déterminent une surface de degré $m - p$ qui, avec la surface de degré p donné, constitue une surface de degré m, passant par

$$m^2p - 1 + \frac{(m-p+1)(m-p+2)(m-p+3)}{6}$$

des m^3 points donnés.

Ce nombre est d'ailleurs supérieur à

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} - 2,$$

et la surface particulière de degré m considérée passe par les m^3 points donnés. C. Q. F. D.

Exemple. — Soient trois quadriques. Elles se coupent, en général, en 8 points. Si, sur ces 8 points, $m^2p = 4$ ($m = 2$, $p = 1$) se trouvent sur un même plan ($p = 1$), les 4 autres se trouvent aussi sur un même plan.

Si, sur les 27 points d'intersection de trois surfaces cubiques, 9 se trouvent sur un même plan, les 18 autres se trouvent sur une quadrique.

Ce théorème peut être regardé comme relatif à l'intersection d'une surface de degré m et d'une courbe de degré m^2, intersection de deux autres surfaces de degré m.

Soient une surface de degré m et une courbe de degré mh qui puissent être considérées comme appartenant à l'intersection d'une autre surface de degré m et d'une surface de degré h. Une surface de degré $m-h$ constitue, avec cette dernière, une surface de degré m. Les trois surfaces de degré m ainsi formées ont en commun m^3 points, dont $m^2 h$ sur la surface de degré h et $m^2(m-h)$ sur l'autre.

Par les $m^2(m-h)$ derniers points et par

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 - m^2(m-h)$$

des $m^2 h$ premiers faisons passer une surface de degré m; elle appartient au réseau et passe par les m^3 points considérés. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si, par*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 - m^2(m-h)$$

points d'une courbe de degré mh $(h < m)$, *on fait passer une surface de degré* m, *elle coupe la courbe en*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} + 1 + m^3$$

autres points fixes (h *est supposé plus petit que* m) *et il faut que*

$$m^3 > \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$

[K7a]

SUR LES RAPPORTS HYPERANHARMONIQUES;

PAR M. GEORGES REMOUNDOZ.

I. Dans un article précédent ([1]) nous avons établi une extension de la notion du rapport anharmonique de quatre quantités au cas de $2n$ quantités, n étant un entier quelconque.

Les nouveaux rapports (rapports hyperanharmoniques) sont des quotients de deux produits de n différences; chacune des $2n$ quantités ne figure qu'une fois dans le numérateur et le dénominateur, mais toutes y figurent dans chacun des termes. C'est là le mécanisme de leur formation et le fait qui entraîne toutes les propriétés de ces rapports.

Il ne faut pas croire que les rapports hyperanharmoniques, tels que je les ai définis, ne sont que des produits de rapports anharmoniques de quatre quantités.

La plupart d'entre eux sont des expressions qui ne sont pas du tout réductibles aux rapports anharmoniques usuels.

Supposons, par exemple, que le numérateur contienne la différence $y_1 - y_2$ et le dénominateur la différence $y_1 - y_3$.

Alors, si y_3 figure dans le numérateur par la différence $y_3 - y_k$ ($k \neq 1, 2, 3$), il faut que y_2 soit combiné avec y_k dans le dénominateur pour que l'on puisse

([1]) *Voir* ce Recueil, mars 1904.

former un rapport hyperanharmonique réductible aux rapports harmoniques (c'est-à-dire produit de tels rapports). Autrement, le rapport obtenu est bien irréductible ([1]).

Ce sont ceux qui nous intéressent surtout.

L'évaluation du nombre des rapports *irréductibles* est facile à faire; je laisse au lecteur le soin de la faire.

II. Les propriétés des rapports hyperanharmoniques sont tout à fait analogues à celles des rapports harmoniques.

Soit

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = \frac{P(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})}{Q(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})}$$

un tel rapport.

Faisons la transformation homographique

$$y_i = \frac{\alpha z_i + \beta}{\gamma z_i + \delta} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2n).$$

On aura

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^n \frac{P(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)\ldots(\gamma z_{2n} + \delta)},$$

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^n \frac{Q(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)\ldots(\gamma z_{2n} + \delta)}.$$

Il en résulte

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = R(z_1, z_2, \ldots, z_{2n}).$$

Les rapports hyperanharmoniques ne changent pas,

([1]) Dans le cas de $n = 3$, tous les rapports réductibles sont nécessairement des rapports harmoniques (c'est-à-dire qu'ils ne renferment que quatre quantités). On s'en aperçoit immédiatement.

quand on effectue sur tous les y_i une transformation homographique quelconque.

III. Si les $2n$ droites OM_1, OM_2, OM_n, ..., OM_{2n} sont coupées par une sécante aux points M_1, M_2, ..., M_n, ..., M_{2n} les rapports hyperanharmoniques de ces $2n$ points restent les mêmes, quelle que soit cette sécante.

La démonstration de ce théorème se fait au moyen du précédent. On passe d'une sécante à une autre par une transformation homographique.

Quant à la définition du rapport hyperanharmonique de $2n$ points M_1, M_2, ..., M_{2n} situés sur une droite, elle se fait ou bien au moyen de leurs abscisses relatives à une origine, ou bien par les segments M_iM_j, d'une façon évidente.

Chacun des termes du rapport sera un produit de n segments M_iM_j n'ayant aucune extrémité commune.

IV. Je remarque maintenant que la formule donnée dans l'article précédent pour l'évaluation du nombre des rapports hyperanharmoniques de $2n$ quantités tient compte aussi des dégénérescences, c'est-à-dire des rapports ne dépendant que de $2n_1$ quantités ($n_1 < n$) ou encore des rapports anharmoniques.

Soit N_n le nombre fourni par cette formule; le nombre des rapports hyperanharmoniques de $2n$ quantités, proprement dits, est égal à $N_n - N_{n-1}$. Si l'on retranche de ce nombre le nombre des rapports *réductibles* (produits de rapports anharmoniques), on obtient le nombre des rapports de $2n$ quantités, qui nous intéressent essentiellement.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1905 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES);

SOLUTION PAR M. CLAPIER.

On donne un cercle C *de centre* O *et de rayon* R, *un point fixe* K *à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux* FK, *émanant d'un point* F *de la circonférence du cercle* C, *se réfléchit en* K *sur le diamètre* OK *et va rencontrer la circonférence de* C *en un point* E. *Soit* M *le milieu de la corde* EF *et soit* AB *la corde de* C *perpendiculaire au diamètre* OK *au point* K.

1° *Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle* MAB *quand* F *décrit la circonférence du cercle* C.

2° *Étudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle* MAB.

3° *On prend un second point* K′ *fixe, intérieur à* C *et situé sur le diamètre* OK. *Un rayon lumineux* F′K′, *parallèle à* FK, *se réfléchit en* K′ *sur ce diamètre et rencontre en* E′ *la circonférence du cercle* C. *Trouver le lieu du point de rencontre de* EF *et de* E′F′ *lorsque* F *et* F′ *se déplacent sur la circonférence du cercle* C. *Étudier ce lieu en supposant que* K *et* K′ *se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de* KK′ *reste fixe.*

4° *Soit* M′ *le milieu de* E′F′. *La droite* MM′ *rencontre le lieu de* M *en un nouveau point* H *et celui de* M′ *en un nouveau point* H′. *Étudier le cercle circonscrit au triangle* HOH′ *et la perpendiculaire au milieu de* HH′.

5° *Soit h le point qui partage* HH′ *dans un rapport donné m. Démontrer que le lieu du point h est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport m varie.*

I. Soit EKF le trajet suivi par un rayon lumineux issu d'un point E de la circonférence (C) et se réfléchissant sur le diamètre $\overline{PP'}$. La normale KA à ce diamètre est bissectrice de $\widehat{EKF}$; par suite, le faisceau K(PEAF) est harmonique et la corde EF va passer par un point fixe P, pôle de la normale AB (*fig.* 1).

Fig. 1.

Il en résulte que le point M, milieu de EF, décrit la circonférence de diamètre OP passant par A et B.

Cherchons comment varient les centres des cercles qui touchent les côtés du triangle AMB dont le cercle circonscrit est fixe.

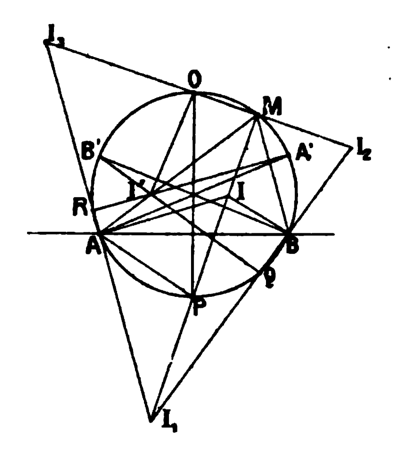
Ce cercle de diamètre OP passe par les points A et B (*fig.* 2). Les bissectrices de $\widehat{AMB}$ sont MP et MO et, si l'on désigne par I et I_1, I_2 et I_3 les centres des cercles inscrits, on sait que le point P est le milieu de $\overline{II_1}$ et le point O est le milieu de $\overline{I_2I_3}$; d'ailleurs, le

triangle AIP est isoscèle et l'on a

$$PI = PA$$

et le lieu des centres I ou I_1 est précisément la circonférence de centre P, orthogonale à la circonférence (C);

Fig. 2.



les deux autres centres I_2 et I_3 sont tels que l'on a

$$OI_2 = OA = OI_3$$

et se meuvent sur le cercle de centre O, orthogonal à (C).

II. Les milieux des côtés du triangle $I_1 I_2 I_3$ formé par les centres des cercles exinscrits sont les points O, Q, R situés sur le cercle circonscrit.

Soient A' et B' les extrémités des diamètres de ce cercle issus des points A et B; le centre du cercle qui passe par les points I_1, I_2, I_3 est à l'intersection de $\overline{RA'}$ et $\overline{QB'}$; l'angle formé par ces droites est constant et égal à $\widehat{AIB}$ et le lieu de ce centre I' est la circonférence de

centre O passant par A′ et B′ : en effet, une rotation de 180° autour du centre du cercle circonscrit amènerait $\overline{IA}$, $\overline{IB}$, $\overline{IP}$ sur la position $\overline{I'A'}$, $\overline{I'B'}$, $\overline{I'O}$; de sorte que $\overline{I'O}$ est égal et parallèle à $\overline{IP}$.

Le triangle ROQ est inscrit dans un cercle fixe qui est le cercle des neuf points relatif au triangle $I_1 I_2 I_3$; le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est double du rayon du précédent, il est donc constant.

Ainsi, le centre I′ est à une distance $\overline{OP}$ des points I_1, I_2, I_3 et la circonférence qui passe par ces trois points se meut de manière que son rayon soit fixe et que son centre décrive une circonférence.

III. Pour construire le rayon réfléchi KF, il suffit de prolonger le rayon incident jusqu'au point de rencontre D avec la circonférence C et de mener $\overline{DF}$ perpendiculaire au diamètre $\overline{OP}$ (*fig.* 1). Si l'on fait cette construction pour un rayon E′K′ parallèle à EK, les arcs EE′, DD′, FF′ sont égaux, et, par suite, les cordes EF, E′F′ sont égales.

La bissectrice de l'angle qu'elles forment va passer par le point O et leurs milieux M et M′ sont à égale distance de ce point. Si l'on désigne par O′ le conjugué harmonique du point O par rapport aux pôles P et P′, il est clair que le point de rencontre des rayons réfléchis EF, E′F′ décrit la circonférence de diamètre OO′; cette circonférence est fixe, lorsqu'on suppose que les points K et K′ se déplacent sur le diamètre réfléchissant de manière que leur milieu soit fixe; en effet, nous avons la relation

$$\overline{OP} \times \overline{OK} = R^2,$$

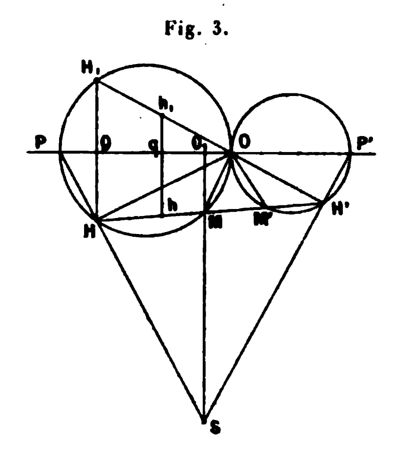
$$\overline{OP'} \times \overline{OK'} = R^2,$$

$$\frac{2}{\overline{OO'}} = \frac{1}{\overline{OP}} - \frac{1}{\overline{OP'}} = \frac{OK - OK'}{R^2};$$

si le milieu de KK′ est donné, $\overline{OK} - \overline{OK'}$ est déterminé et le segment $\overline{OO'}$ est constant.

IV. Les lieux des points M et M′ sont les cercles de diamètre OP et OP′, et, de plus, OM = OM′ (*fig.* 3);

Fig. 3.



désignons par H et H′ les points où la droite MM′ coupe ces cercles et joignons PH, P′H′; les deux quadrilatères inscriptibles OPHM, OP′H′M′ montrent que les angles $\widehat{OPH}$, $\widehat{OP'H'}$ sont égaux respectivement aux angles à la base du triangle isoscèle OMM′; donc le triangle PSP′ est lui-même isoscèle et le point S, intersection de PH, P′H′, décrit la perpendiculaire au milieu O_1 de $\overline{PP'}$. Le cercle décrit sur OS comme diamètre passe par les points H, H′ et O_1; donc le cercle circonscrit au triangle OHH′ passe par un second point fixe O_1; de plus, puisque O_1S est la bissectrice de $\widehat{HSH'}$, la perpendiculaire au milieu de HH′ pivote autour du point O_1.

V. Les angles $\widehat{POH}$, $\widehat{P'OH'}$ compléments des angles à la base du triangle isoscèle PSP′ sont égaux et, si l'on prend le symétrique H_1 de H par rapport au diamètre $\overline{PP'}$, les trois points H_1, O, H′ sont en ligne droite.

Soit h le point qui partage HH′ dans le rapport donné m; menons $\overline{hqh_1}$ perpendiculaire à PP′; nous avons les relations

$$\frac{hH}{hH'} = \frac{h_1H_1}{h_1H'} = m,$$

$$\frac{qh_1}{HH_1} = \frac{qh_1}{2QH_1} = \frac{Oh_1}{2OH_1},$$

$$\frac{hh_1}{HH_1} = \frac{H'h}{H'H}.$$

De la première on déduit que le rapport $\frac{Oh_1}{OH_1}$ est constant, car O et h_1 partagent tous deux $H'H_1$ dans un rapport constant. Par suite, le point h_1 décrit une circonférence de diamètre OT; les deux autres relations montrent que le rapport $\frac{qh_1}{hh_1}$, et par suite $\frac{qh_1}{qh}$, est aussi constant et, par suite, le lieu du point h est la figure homologique du lieu du point h_1; c'est une ellipse admettant comme cercle principal la circonférence précédente.

Dans le cas de la figure, c'est-à-dire quand le point h est situé entre les points H et H′, le petit axe de l'ellipse est OT, $\frac{TP}{TP'}$ étant égal à m; si le point h était situé en dehors des points H et H′, $\overline{OT}$ serait le grand axe de l'ellipse.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déterminer l'intégrale de l'équation $pq = xy$ qui se réduit à*

$$\sqrt{1+y^2} \quad \textit{pour} \quad x = 1.$$

SOLUTION.

$$z = x\sqrt{1+y^2}.$$

II. *Déterminer une surface dont les asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant les développantes du cercle*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

SOLUTION.

$$z = Cx + C'y + C'' + e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \alpha}.$$

(Juillet 1905.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Lignes asymptotiques de la surface engendrée par la rotation de la courbe $z = f(x)$ tournant autour de Oz.*

Application :

$$z = \pm \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{3a}{2}\log \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

On construira la courbe méridienne.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère les surfaces*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz \qquad \textit{et} \qquad ax^2 + by^2 = z^2,$$

et l'on demande :

1° *D'étudier la projection sur xOy de l'intersection de ces deux surfaces;*

2° *D'évaluer l'aire de la portion de la première surface qui est comprise à l'intérieur de la seconde.*

On considérera successivement les deux cas suivants :

$$a > b > 1, \qquad a > 1 > b > 0.$$

(Juillet 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Un cercle de rayon donné* R *a pour centre un point situé sur* Ox *à la distance* x_0 *de l'origine* O *des coordonnées rectangulaires. Ce cercle a pour axe* Ox.

Déterminer la surface passant par ce cercle et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = 0.$$

Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

Solution.

On trouve le conoïde

$$x_0^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + z^2 = R^2.$$

Épreuve pratique. — *Le point* z *décrit dans le plan des* z *un chemin allant du point* $z_0 = \sqrt{-1}$ *au point*

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)\sqrt{-1}$$

sur une chaînette symétrique par rapport à l'axe des y. *La lettre* e *désigne le nombre connu.*

Calculer la longueur de ce chemin à 0,001 *près.*

Solution.

1,175 par défaut. (Juillet 1905.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un cylindre de révolution est représenté par les équations*

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t.$$

1° *Déterminer une courbe C tracée sur le cylindre, telle que son rayon de courbure vérifie la relation*

$$\mathrm{R}\sin^2\varphi = \frac{a}{\sqrt{1+b^2}},$$

où φ est l'angle de la tangente à la courbe avec la génératrice du cylindre et b une constante.

2° *Calculer le rayon de courbure, le rayon de torsion et le rayon de la sphère osculatrice en un point de la courbe C obtenue.*

3° *Démontrer que le rayon de torsion* T *vérifie la relation*

$$\mathrm{T}\sin 2\varphi = 2a.$$

4° *Déterminer les courbes plus générales tracées sur le cylindre telles que*

$$\mathrm{T}\sin 2\varphi = 2a + \mathrm{C}\sin^2\varphi.$$

Épreuve pratique. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = xy^2.$$

2° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = x^\alpha y^\beta,$$

α et β étant des constantes. (Juillet 1905.)

Rennes.

Epreuve écrite : I. Calcul intégral. — *On donne l'équation différentielle* E_α

$$(\mathrm{E}_\alpha)\quad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+2)x-(\alpha+1)]\frac{dy}{dx} + \frac{2\alpha+1}{4}y = 0,$$

où α désigne une constante.

1° *Montrer que* (E_α) *admet deux intégrales y_0 et y_1 telles que*

$$y_0 = \varphi(\alpha, x), \qquad y_1 = x^{-\alpha}\varphi(-\alpha, x)$$

$\varphi(\alpha, x)$ désignant une série entière en x dont les coefficients dépendent de α. et égale à 1 *pour* $x = 0$.

2° *Trouver la limite vers laquelle tend le rapport* $\frac{y_0 - y_1}{\alpha}$ *quand* α *tend vers zéro.*

3° *Calculer la transformée de* E_α *définie par le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$ *et par le changement de fonction*

$$y = t^{\frac{1}{2}}\mathrm{T},$$

et comparer cette transformée à l'équation $E_{-\alpha}$.

4° *Étudier les intégrales de l'équation* E_0 *à laquelle se réduit* E_α, *pour* $\alpha = 0$, *dans le voisinage de chacun des trois points*

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = \infty.$$

II. Calcul différentiel. — 1° *Vérifier que l'équation*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

représente la surface développable S *dont les plans tangents ont pour équation*

$$z = x \sin t + y \cos t + t,$$

t *étant un paramètre variable.*

2° *Trouver l'arête de rebroussement et les lignes de courbure de la surface* S. (Juillet 1905.)

SOLUTION.

I. La série $\varphi(\alpha, x)$ s'obtient en faisant

$$a = \tfrac{1}{2}, \qquad b = \alpha + \tfrac{1}{2}, \qquad c = \alpha + 1$$

dans la série hypergéométrique

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1).b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1.2\ldots n.c(c+1)\ldots(c+n-1)} x^n.$$

On a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{y_0 - y_1}{\alpha} = \varphi(0, x) \log x + 2\varphi'_\alpha(0, x)$$

et

$$\varphi'_2(o, x) = 2\sum x^n \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} \end{array} \right\}.$$

L'équation E_α admet les deux intégrales

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi\left(-\alpha, \frac{1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \varphi\left(\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Les résultats précédents font connaître un système fondamental d'intégrales de E_0 dans le domaine de chacun des points $x = 0$, $x = \infty$.

Pour avoir un pareil système dans le domaine du point $x = 1$, il suffit de remarquer que l'équation différentielle E_0 ne change pas quand on change x en $1 - x$.

E_0 est l'équation différentielle des périodes de l'intégrale elliptique normale de première espèce ($k^2 = x$). En chacun de ses trois points singuliers, l'équation déterminante a une racine double.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x + \frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} - 11y = 0,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 0.$$

II. *a désignant une constante réelle choisie de façon que l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx$$

ait un sens, calculer la valeur de cette intégrale.

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$p^2 - 2pq + 2q^2 - 4z = 0,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

Intégrer cette équation et déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont

$$x = 0, \qquad z = y^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer la forme générale des courbes représentées en coordonnées polaires* (θ, r) *par l'équation*

$$d\theta = \frac{a^2 r - 1}{r - 5}\sqrt{\frac{r - 2}{r^3 - 19r + 20}}\,dr,$$

où a désigne une constante réelle. (Juillet 1905.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Sur la surface dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est* $z^2 = 2ay$, *déterminer une courbe* C *dont les tangentes font un même angle* θ *avec le plan des* xy; *construire les projections de* C.

Lorsque $\tang\theta$ *est* $\frac{1}{2}$, *la projection sur* OXY *est une cycloïde.*

II. *Deux points* M, M′ *de masse* 1 *se repoussent avec une force égale à* 6MM′; *en outre, chacun d'eux est attiré vers l'origine de deux axes rectangulaires* OX, OY, *par une force égale à seize fois sa distance au point* O. *A l'instant initial, les deux points sont sur l'axe des x,* M *ayant une abscisse* $3a$ *et une vitesse nulle,* M′ *une abscisse* $-a$ *et une vitesse* $8a$ *parallèle à* OY. *Chercher, en fonction du temps, les coordonnées x, y, x', y' des deux points; reconnaître qu'ils suivent une même trajectoire et déterminer cette courbe.*

SOLUTION.

Le mouvement a lieu dans le plan XOY et ses équations sont linéaires : en les combinant par addition et soustraction, on arrive aux intégrales

$$x = 2a\cos 2t + a\cos 4t, \qquad y = -2a\sin 2t + a\sin 4t,$$
$$x' = -2a\cos 2t + a\cos 4t, \qquad y' = 2a\sin 2t + a\sin 4t.$$

Trajectoire commune : hypocycloïde; cercle de rayon a roulant dans un cercle de rayon $3a$. (Juin 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère deux courbes* C, C' *respectivement décrites par les points* M, M' *dont les coordonnées rectangulaires sont de la forme* $R\cos\theta$, $R\sin\theta$, $a\theta$ *pour* M; $R\cos\theta'$, $R\sin\theta'$, $-a'\theta'$ *pour* M'.

Montrer que, si l'on fait θ' *égal à* θ, *les tangentes à* C *en* M *et à* C' *en* M' *se coupent en un point* P *dont le lieu est une développante de cercle orthogonale à* MP *et à* M'P.

L'angle MPM' *est constant : dans le cas où il est droit, calculer le volume* V *engendré par le triangle* MPM' *et l'aire* A *décrite par son périmètre quand* θ *croît de* 0 *à* π.

SOLUTION.

$$V = \frac{\pi^4 R^2}{24}\,\frac{a^2+R^2}{a},$$

$$A = \frac{\pi^2 R\sqrt{a^2+R^2}}{6}\,\frac{\pi(a+R)+2\sqrt{a^2+R^2}}{a}.$$

II. *Mouvement d'un point non pesant assujetti à se mouvoir sur un cône dont les génératrices font avec l'axe un angle de* 30° *et attiré vers le sommet du cône par une force proportionnelle à la distance.*

CALCUL. — *Sur une sphère de* 10^m *de rayon, on considère un triangle* ABC; *on donne les longueurs des côtés* b, c *et l'angle* A : *calculer les angles* B, C *et la surface en mètres carrés.* (Novembre 1904.)

Épreuve écrite. — I. *Étant donné sur une sphère un grand cercle* (C), *de pôles* A, A′, *à un point quelconque* M *de la sphère on fait correspondre :*

1° *La projection* P *de* M *sur le plan du cercle* (C);

2° *L'intersection* Q *de* (C) *avec le demi-cercle* AMA′.

Sur quelle courbe (Γ) *doit se déplacer* M *pour que les points* P *et* Q *décrivent des arcs égaux? Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (Γ) *et rectifier l'une de ces trajectoires à partir du cercle* (C).

Solution.

(Γ) est une courbe de Viviani; trajectoires :

$$\psi - \psi_0 = \cot\theta.$$

II. *On donne deux cercles* (C), (C′) *ayant même axe* OO′; *deux points* M, M′ *sont assujettis à rester l'un sur le cercle* (C), *de rayon* R, *l'autre sur* (C′), *de rayon* $\frac{1}{2}$R : *ils ont chacun une masse* 1 *et s'attirent avec une force* μ^2MM′. *Trouver le mouvement des deux points en supposant leurs vitesses initiales nulles.*

Calcul. — *A deux heures sidérales données, t, t', une certaine étoile circompolaire a des hauteurs h, h' et un même azimut α : calculer cet azimut ainsi que la latitude, supposée boréale, du lieu de l'observation.*

(Juillet 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite : I. Géométrie analytique et Analyse. — 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un cercle* (C) *de rayon* R *et de centre* K, *tangent à Oy en* O, *montrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur les tangentes au cercle* (C) *est une cardioïde* Γ.

2° M *et* M′ *étant deux points de* (Γ) *tels que l'angle* MOM′ *soit droit, trouver le lieu du milieu du segment* MM′.

3° M *désignant un point quelconque de* (Γ) *et* P *un point de la droite* OM *tel que le produit* OM.OP *soit égal à une constante* λ^2, *montrer que le point* P *décrit une*

parabole quand M *décrit* (Γ); *trouver les trajectoires orthogonales des paraboles obtenues en faisant varier* λ.

4° *La cardioïde* (Γ) *rencontre, en dehors de l'origine, l'axe* Ox *en un point* A *et l'axe* Oy *en deux points* B, B' : *calculer l'aire de la surface* (Σ) *engendrée par la rotation de l'arc* AB *autour de* Ox; *calculer aussi le volume compris entre cette surface* (Σ) *et un plan mené par* O *perpendiculairement à* Ox.

5° *Calculer l'aire de la partie de la surface de la sphère de centre* O *et de rayon* 2R *qui est comprise à l'intérieur d'un cylindre dont la base est la cardioïde* (Γ) *et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan* xOy; *calculer de même l'aire de la surface latérale du cylindre ainsi limité.*

II. MÉCANIQUE. — *Réduction d'un système de six vecteurs.*

Longueurs des vecteurs :

$$OA = 2^m, \quad OB = 1^m, \quad CD = 3^m,$$
$$EF = 4^m, \quad GH = 3^m, \quad OL = 2^m.$$

Les positions respectives des vecteurs sont définies par les données suivantes : $\widehat{AOB} = 60°$; CD *et* EF *sont perpendiculaires au plan* AOB, *les points* C *et* E *sont sur les prolongements de* OA *et* OB, *et l'on a*

$$OC = 5^m, \quad OE = 3^m;$$

GH, *dans le plan* AOB, *est perpendiculaire à la bissectrice* OG *de l'angle* AOB, *et l'on a*

$$OG = 6^m;$$

OL *est situé dans le plan mené perpendiculairement à* AOB *par* OG, *et l'on a*

$$\widehat{GOL} = 45°.$$

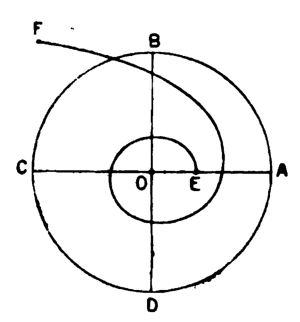
(Juillet 1905.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un petit volant* ABCD *mobile autour d'un axe vertical* O *est assimilable à un anneau très mince de rayon* R *centimètres et de poids* P *grammes.*

Un ressort spiral plat d'élasticité parfaite a l'une de ses extrémités fixée en F *et l'autre extrémité attachée en* E *à l'un des bras* OA *du volant, à une distance* OE $= \rho$ *centimètres de l'axe.*

On tourne le volant d'un angle α *radiant dans le sens*



des aiguilles d'une montre à partir de la position d'équilibre. Le ressort exerce alors sur le bras du volant un effort perpendiculaire de f grammes.

On abandonne alors sans choc le système à lui-même :

1° *Étudier le mouvement du volant;*

2° *Prenant*

$$R = 2^{cm},5, \qquad \rho = \frac{R}{2}, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \qquad f = 0^g,6,$$

déterminer P *de manière que le volant batte la seconde.*

Nota. — *On négligera le poids des bras du volant.*

II. *Une courbe a pour équation par rapport à deux axes rectangulaires*

$$x - y = b e^{\frac{y}{a}},$$

a et b étant des longueurs données, dont la première est positive.

1° *Construire cette courbe et calculer l'aire qui, dans la région des y négatifs, est limitée par la courbe, l'axe des x et la bissectrice de l'angle xOy.*

2° *Considérant ensuite b comme un paramètre variable,*

trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées par cette même équation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la valeur de l'expression*

$$\frac{a^{2,157}\, b^{-\frac{1}{7}}}{\text{arc tang}\,\theta\,(c^3 + a\,\theta\, \mathcal{L}b)},$$

dans laquelle on a

$$a = 26, \qquad b = 7{,}432, \qquad c = 0{,}245,$$
$$\theta = 0{,}0523.$$

N.-B. — *$\mathcal{L}b$ signifie logarithme népérien de b.*

(Novembre 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On donne dans un plan une circonférence de centre* K *et de rayon* a, *et un point* A *sur cette circonférence.*

Trouver dans ce plan une courbe Γ *dont le rayon de courbure en un point* M *soit égal à la corde du cercle* K *issue de* A *parallèlement à la tangente en* M.

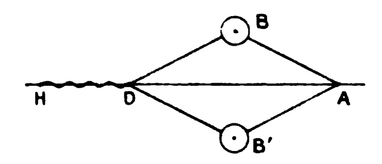
L'axe des x *étant parallèle au diamètre* AK, *déterminer les constantes d'intégration de manière que* Γ *passe par l'origine* O *des coordonnées et soit normale en ce point à l'axe des* x.

L'arc de courbe ainsi déterminé ira couper une seconde fois l'axe des x *en un point* B *dont on calculera l'abscisse. Trouver la longueur de l'arc de courbe* OB, *l'aire comprise entre cet arc et l'axe des* x, *les coordonnées du centre de gravité de cette aire.*

II. *Sur un axe* HORIZONTAL *animé d'une rotation uniforme* ω *est monté un régulateur à force centrifuge formé d'un losange articulé* ABB'D. *Le sommet* A *est fixé en un point de l'axe, les sommets* B *et* B' *portent des masses égales* M, *et le sommet* D, *qui peut glisser le long de l'axe, est attaché à l'extrémité d'un ressort à boudin dont l'autre extrémité est fixée en un point* H *de l'axe. Le ressort exerce une force de* E *kilogrammes pour un allongement*

égal à l'unité de longueur. Quel sera l'allongement du ressort dans l'état d'équilibre relatif du régulateur?

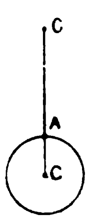
On appellera l la longueur naturelle du ressort, a la



longueur des tiges du régulateur, et $2c+l$ la distance HA.

On négligera le poids des tiges et les frottements.

Épreuve pratique. — *Un pendule est formé d'une tige* OA *très mince et de poids négligeable, soudée à un disque circulaire, homogène, pesant, suivant le prolongement d'un de ses rayons* CA. *L'axe de suspension, qui passe*



en O, *est horizontal et perpendiculaire au plan du disque.*

On donne :

$$OA = 0^{m},753, \qquad CA = r = 0^{m},228, \qquad g = 9^{m},81.$$

1° *Calculer la durée d'oscillation de ce pendule.*

2° *On pratique dans le disque un trou circulaire et concentrique. Quel doit être le rayon de ce trou, pour que le pendule ainsi modifié batte la seconde?*

(Juillet 1905.)

TABLE DES MATIÈRES.

Août 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

SEPTEMBRE 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris :
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES
dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat

---

[A3aα]

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE DALEMBERT [1].

PREMIÈRE DÉMONSTRATION PAR M. G. LERY.

1. Soit $f(z)$ une équation algébrique

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

à coefficients réels ou complexes.

Représentons respectivement dans deux plans P et P′ les quantités imaginaires z et $f(z)$. La fonction $f(z)$ est *uniforme*, de sorte que, si z décrit dans le plan P un contour fermé C, l'affixe de $f(z)$ reviendra aussi à son point de départ dans P′, en décrivant un chemin C′; mais l'argument ω de $f(z)$ qu'on suit par continuité le long de C′ pourra avoir varié, si C′ entoure l'origine; cette variation sera d'un multiple de 2π, en supposant que C′ ne passe pas par l'origine, c'est-à-dire que C ne contient aucun point-racine de $f(z)$.

Comme $f(z)$ est *continue*, en prenant pour C une petite courbe tout entière voisine d'un point z_0, on aura pour C′ une petite courbe voisine du point $f(z_0)$, et aussi voisine que l'on veut si C a tous ses points suffisamment près de z_0. En particulier, *lorsque* $f(z_0)$ *n'est pas nul*, on peut choisir C assez proche de z_0

(1) Le théorème de Dalembert faisant de nouveau partie du programme de la classe de Mathématiques Spéciales, nous croyons rendre service à nos lecteurs en publiant de nouvelles démonstrations de cette proposition. N. D. L. R.

pour que C′ ne contienne pas l'origine, et alors ω *ne varie pas* lorsque z décrit C.

Enfin, si deux contours C_1 et C_2 ont une partie commune, soit C le contour total qu'on obtient en la supprimant. Décrivons-les dans le sens positif; la variation de ω le long de C est égale à la somme des variations le long de C_1 et C_2.

2. *On peut trouver dans le plan* P *un contour* Γ *tel que, lorsque z le décrit, l'argument de $f(z)$ varie.* — En effet, en posant $\zeta = \frac{1}{z}$, on a

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_m\zeta^m}{\zeta^m};$$

si ζ décrit, dans le sens négatif, un cercle ayant pour centre l'origine et de rayon assez petit, le numérateur restera voisin de a_0, qu'on suppose non nul, et son argument reviendra à la même valeur; l'argument du dénominateur diminuera de $2m\pi$, et celui de $f(z)$ augmentera de cette quantité. Or ζ décrira le cercle en question si z suit un cercle Γ, de rayon suffisamment grand, dans le sens positif.

3. *Dans le cercle* Γ *existe au moins une racine de $f(z)$.* — Par les diamètres parallèles aux axes de coordonnées, divisons en quatre parties le carré circonscrit à Γ; soient C_1, C_2, C_3, C_4 les contours des portions de Γ comprises respectivement dans ces carrés. Si l'un d'eux contient un point-racine, le théorème est vrai; si cela n'a pas lieu, la variation de ω le long de l'un au moins de ces contours n'est pas nulle, sans quoi la somme des quatre variations, qui est la variation le long de Γ, serait nulle.

Appelons $C^{(1)}$ celui, ou l'un, des contours donnant une variation de ω; divisons le carré circonscrit en quatre parties égales, et ainsi de suite.

Si aucune des lignes de division qu'on emploie successivement ne passe par un point-racine, on obtient une suite de contours $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ..., contenus les uns dans les autres, inscrits dans des carrés tels que le côté de chacun d'eux est moitié de celui du précédent. Ils ont pour limite un point z_0 intérieur à Γ.

C'est un point-racine, car, si $f(z_0)$ n'était pas nul, nous pourrions prendre un des contours C de la suite assez rapproché de z_0 pour que le contour correspondant C' soit très voisin du point $f(z_0)$ et ne contienne pas l'origine dans le plan P' : ω ne subirait pas de variation quand z décrit C, ce qui est impossible.

4. La démonstration précédente est une simple application de la méthode du quadrillage, dont se sert M. Painlevé pour démontrer les théorèmes relatifs à la continuité des fonctions de plusieurs variables et aux intégrales multiples. On peut la considérer comme une extension du procédé, bien connu des élèves, au moyen duquel on démontre qu'une équation algébrique, à coefficients réels et de degré impair, a au moins une racine réelle :

1° Il existe un nombre G tel que l'on ait

$$f(G)f(-G) < 0;$$

2° En divisant le segment $(G, -G)$ en 2, 4, 8, ... parties égales, on définit un point-limite, qui est racine.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION PAR M. ÉTIENNE POMEY.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. — *Toute équation binome a au moins une racine.*

Soit $x^m = a + bi$ l'équation binome considérée.

I. Supposons d'abord m impair.

Si b est nul, l'équation a une racine réelle du signe de a, car, x croissant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, x^m croît lui-même d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$ et passe, en conséquence, une fois et une seule par la valeur a.

Supposons maintenant $b \gtrless 0$. Nous voulons montrer qu'il existe au moins un système de valeurs réelles de y et de z satisfaisant à l'équation $(y + zi)^m = a + bi$.

Or, cette équation envisagée par rapport aux inconnues *réelles* y et z est équivalente au système

$$(1) \qquad (y + zi)^m = a + bi,$$

$$(2) \qquad (y - zi)^m = a - bi.$$

Ce système peut s'écrire abréviativement

$$A = B, \qquad C = D.$$

Ses solutions réelles en y et z satisfont au système

$$AC = BD, \qquad AD = BC.$$

Mais les solutions réelles de ce dernier vérifient l'équation $A^2 = B^2$, sans qu'on puisse affirmer qu'elles vérifient l'équation $A = 0$. Nous allons cependant montrer que, parmi les solutions réelles du second système, il y en a une qui vérifie $A = B$.

En effet, les équations du second système étant explicitées sont

$$(3) \qquad (y^2 + z^2)^m = a^2 + b^2,$$

$$(4) \qquad (a - bi)(y + zi)^m - (a + bi)(y - zi)^m = 0.$$

Si l'on change i en $-i$ dans l'équation (4), cette équation ne change pas. Elle est donc indépendante de i, qu'elle ne contient qu'en facteur. En la divisant par i, on obtient une équation à coefficients *réels*, homogène en y et z. Comme d'autre part le terme du plus haut degré en $\frac{y}{z}$ est $-2b\left(\frac{y}{z}\right)^m$ et que b est différent de zéro, cette équation est de degré impair, et par suite elle a au moins une racine réelle en $\frac{y}{z}$; soit α cette racine.

Considérons alors le système

$$\frac{y}{z} = \alpha, \qquad (y^2 + z^2)^m = a^2 + b^2.$$

Éliminant y entre ces deux équations, on a

$$z^{2m}(\alpha^2 + 1)^m = a^2 + b^2,$$

équation en z qui a deux raisons réelles opposées z_1 et z_2 ($z_2 = -z_1$), dont la valeur absolue est le radical arithmétique

$$\sqrt[2m]{\frac{a^2 + b^2}{(\alpha^2 + 1)^m}}.$$

A ces deux valeurs z_1 et $-z_1$ de z correspondent respectivement les deux valeurs réelles

$$y_1 = \alpha z_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = -\alpha z_1 = -y_1$$

de y.

Cela posé, je vais montrer que l'un de ces systèmes de valeurs est une solution de l'équation (1). En effet,

d'après une remarque faite plus haut, ces valeurs vérifient l'équation $A^2 = B^2$, c'est-à-dire l'une des équations $A = B$, $A = -B$, en sorte que l'on a l'une ou l'autre des égalités

$$(5)\qquad (y_1 + z_1 i)^m = a + bi,$$

$$(6)\qquad (y_1 + z_1 i)^m = -(a + bi).$$

L'égalité (6) peut s'écrire

$$(-y_2 - z_2 i)^m = -(a + bi)$$

ou, puisque m est impair,

$$(7)\qquad (y_2 + z_2 i)^m = a + bi.$$

Comme l'une des deux égalités (5), (7) est satisfaite, on voit enfin que l'un des systèmes de valeurs (y_1, z_1), (y_2, z_2) satisfait à l'équation (1).

II. Supposons maintenant m pair.

On a alors

$$m = 2^\mu p,$$

μ étant un certain entier positif et p un certain nombre impair. L'équation proposée peut s'écrire

$$(8)\qquad (x^p)^{2^\mu} = a + bi$$

ou, en posant $(x^p)^{2^{\mu-1}} = u$,

$$u^2 = a + bi.$$

Celle-ci admet les deux racines

$$\pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right)$$

$$(\varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon b > 0).$$

Soit u_1 l'une d'elles. Adoptons pour u la valeur u_1; et considérons l'équation

$$(x^p)^{2^{\mu-1}} = u_1.$$

Posons $(x^p)^{2^{\mu-2}} = u$, l'équation devient

$$u^2 = u_1.$$

Celle-ci a deux racines; je considère l'une d'elles u_2, et j'envisage l'équation

$$(x^p)^{2^{\mu-2}} = u_2,$$

et ainsi de suite. On voit qu'on sera conduit à considérer l'équation

$$x^p = u_\mu,$$

u_μ étant une imaginaire de la forme $\alpha + \beta i$. Comme p est inférieur, on sait, par l'étude faite dans le paragraphe I, que cette équation a une racine au moins. Et, par conséquent, l'équation (8) a une racine.

Théorème de Dalembert. — *Toute équation algébrique a une racine.*

Soit $f(z) = 0$ l'équation considérée. Posons

$$z = x + yi,$$

x et y étant réels. Nous pourrons mettre $f(x+yi)$ sous la forme

$$f(x+yi) = A + Bi,$$

A et B étant deux polynomes entiers en x et y à coefficients réels. On en déduit

$$[\text{mod } f(x+yi)]^2 = A^2 + B^2.$$

$A^2 + B^2$ est, comme A et B, un polynome entier en x

et y à coefficients réels; d'ailleurs, x et y étant réels, sa valeur n'est jamais négative. Il est donc limité inférieurement et, comme c'est une fonction continue de x et y, il y a un minimum qu'il atteint effectivement au moins pour un système de valeurs x_0, y_0 de x et y. Soient A_0 et B_0 les valeurs que prennent A et B pour $x=x_0$, $y=y_0$. En sorte que l'on a

$$[\bmod f(x_0+y_0 i)]^2 = A_0^2 + B_0^2.$$

Je vais démontrer que l'on a

$$A_0 = B_0 = 0.$$

Il en résultera que l'on a

$$f(x_0+y_0 i) = 0.$$

Posons, en effet, pour abréger, $x_0+y_0 i = z_0$. Soient h un nombre positif arbitraire et ω une quantité que nous déterminerons ultérieurement. On a

$$f(z_0+\omega h) = f(z_0) + \frac{\omega h}{1} f'(z_0) + \frac{\omega^2 h^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{\omega^m h^m}{m!} f^{(m)}(z_0),$$

en désignant par m le degré de $f(z)$.

En posant, d'une manière générale,

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = A_k B_k i,$$

l'identité précédente peut s'écrire sous la forme

$$f(z_0+\omega h) = A_0 + B_0 i + \omega h(A_1 + B_1 i) + \omega^2 h^2 (A_2 + B_2 i) + \ldots + \omega^m h^m (A_m + B_m i).$$

Le polynome $f(z)$ étant de degré m, le coefficient $A_m + B_m i$ de $\omega^m h^m$ n'est pas nul, et, par suite, les coefficients $A_1 + B_1 i$, $A_2 + B_2 i$, ..., $A_m + B_m i$ ne sont

pas tous nuls : soit $A_p + B_p i$ le premier d'entre eux qui n'est pas nul. Le développement de $f(z_0 + \omega h)$ se réduit alors à

$$f(z_0 + \omega h)$$
$$= A_0 + B_0 i + \omega^p h^p (A_p + B_p i) + \ldots + \omega^m h^m (A_m + B_m i).$$

Cela posé, toute équation binome ayant une racine d'après le théorème préliminaire, il existe une valeur λ de ω satisfaisant à l'équation $\omega^p = \varepsilon$, où ε est ± 1. Et l'on a en conséquence

$$f(z_0 + \lambda h)$$
$$= A_0 + B_0 i + \varepsilon h^p (A_p + B_p i) + \ldots + \lambda^m h^m (A_m + B_m i).$$

Comme λ est une imaginaire de la forme $\alpha + \beta i$, le second membre est une imaginaire de cette même forme, et en mettant en évidence seulement les deux termes du plus bas degré en h dans la partie réelle et dans la partie imaginaire, on aura

$$f(z_0 + \lambda h) = A_0 + \varepsilon A_p h^p + \ldots + i(B_0 + \varepsilon B_p h^p + \ldots).$$

On en déduit successivement

$$[\operatorname{mod} f(z_0 + \lambda h)]^2$$
$$= (A_0 + \varepsilon A_p h^p + \ldots)^2 + (B_0 + \varepsilon B_p h^p + \ldots)^2,$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\operatorname{mod} f(z_0 + \lambda)]^2 - (A_0^2 + B_0^2) \\ \quad = 2\varepsilon(A_0 A_p + B_0 B_p) h^p + \ldots, \end{array} \right.$$

les termes non écrits au second membre étant de degré supérieur en h.

De même, en choisissant pour ω la valeur μ d'une racine de l'équation binome $\omega^p = \varepsilon' i$, dans laquelle ε' désigne ± 1, on trouve, par un calcul analogue,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\operatorname{mod} f(z_0 + \mu h)]^2 - (A_0^2 + B_0^2) \\ \quad = -2\varepsilon'(A_0 B_p - B_0 A_p) h^p + \ldots. \end{array} \right.$$

Or, si, dans les seconds membres de (1) et (2), les coefficients de h^p sont différents de zéro, on peut choisir le nombre positif h de façon que ces seconds membres aient chacun le signe de leur premier terme, et, en prenant convenablement ε et ε', on peut faire en sorte que ce signe soit le signe moins, mais alors on a

$$[\bmod f(z_0+\lambda h)]^2 < A_0^2 + B_0^2$$

et

$$[\bmod f(z_0+\mu h)]^2 < A_0^2 + B_0^2,$$

ce qui est impossible, puisque $A_0^2 + B_0^2$ est le minimum du carré du module de $f(z)$. On a donc

$$A_0 A_p + B_0 B_p = 0 \quad \text{et} \quad A_0 B_p - B_0 A_p = 0.$$

Or $A_p + iB_p$ n'est pas nul, par hypothèse, donc $A_p^2 + B_p^2$ est différent de zéro, et, par suite, ces deux relations exigent qu'on ait

$$A_0 = B_0 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

[O3jα]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

PAR M. SOLON CHASSIOTIS.

1. Soit à trouver les courbes gauches C, ayant même représentation sphérique des tangentes qu'une courbe arbitraire C′ (qui n'est pas une droite ni une hélice) et qui satisfont en outre à la relation

$$F(R, T) = 0, \tag{1}$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de C.

Nous supposerons que R et T peuvent être exprimées à l'aide d'un paramètre u et que F n'est pas homogène

en R et T, ni nul ni infini pour toutes les valeurs de u.

Si C' est une courbe quelconque, on passera d'un point $M'(x', y', z')$ de C' à un autre $M(x, y, z)$ de C, par une transformation de Combescure :

$$(2)\qquad \frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} = \frac{dz}{dz'} = \frac{ds}{ds'} = \frac{R}{R'} = \frac{T}{T'} = \varphi(u);$$

cette transformation n'est définie qu'à la fonction $\varphi(u)$ près : on aura, en prenant une deuxième courbe C'' analogue à C' de rapports analogues aux précédents et si C'' est définie par les formules de Serret (*voir* Note de Serret dans Monge, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie,* 5e édit.),

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{\sin u} = \frac{dy}{-\cos u} = \frac{dz}{\psi(u)} = \frac{ds}{1+\psi^2} \\ &\quad = \frac{R}{\dfrac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{T}{\dfrac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}} = \varphi_1(u); \end{aligned}\right.$$

comme $\varphi_1(u)$ est arbitraire, on peut se proposer de la déterminer de manière que la courbe C satisfasse à la relation (1). On aura

$$(4)\qquad F\left(\varphi_1 \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}},\ \varphi_1 \frac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}\right) = 0,$$

équation qui détermine la fonction φ_1. Des formules (4) nous déduisons

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int \varphi_1(u)\sin u\,du, \\ y &= -\int \varphi_1(u)\cos u\,du, \\ z &= \int \varphi_1(u)\psi(u)\,du. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les coordonnées du point M d'une des courbes cherchées. On remarquera que x et y sont les parties réelles de l'imaginaire

$$-y + ix = \int \varphi_1(u)\, e^{iu}\, du.$$

En sorte que les quadratures (c) se réduisent toujours à deux :

$$\int \varphi_1(u) e^{iu}\, du, \qquad \int \varphi_1(u)\, \psi(u)\, du.$$

On peut même signaler le cas très étendu où ces quadratures se réduisent à une seule, lorsque

$$\varphi_1(u) = \psi(u).$$

Dans ce cas, ψ satisfait à l'équation

$$(4\ bis) \quad F\left(\psi' \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}},\ \psi' \frac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}\right) = 0,$$

et l'on a

$$z = \frac{1}{2}\psi^2(u).$$

Quant à x et y, ils sont donnés par la quadrature

$$ix - y = \int e^{iu}\, \psi'(u)\, du.$$

Si $\psi(u)$ est un polynome satisfaisant à l'équation (4 *bis*), la quadrature précédente pourra s'effectuer complètement.

Remarques. — I. Les équations (3) ont été employées par M. Bioche pour la démonstration d'une propriété des courbes de J. Bertrand (*Bulletin de la Soc. mathém. de France,* 1889, p. 109).

II. Il existe un autre procédé, dû à M. Darboux, pour trouver *toutes* les courbes satisfaisant à l'équation (1) (*voir* G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 43). Les quadratures qui figurent dans les formules de M. Darboux *peuvent aussi se réduire à une seule*, par des changements convenables de variables et des fonctions, dans des cas très étendus.

2. Nous allons, à titre d'application, traiter deux exemples, dont le premier nous fera connaître un exemple de courbe gauche *algébrique* à courbure constante.

EXEMPLE I : *Courbes gauches à rayon de courbure constant* (courbes de Monge). — Ces courbes satisfont à la relation

$$R = a;$$

on a

$$x = a \int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}} \sin u \, du,$$

$$y = -a \int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}} \cos u \, du,$$

$$z = a \int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}} \psi(u) \, du;$$

dans le cas où $\psi(u) = \operatorname{tang} u$, les quadratures précédentes deviennent

$$x = a \int \sin u \cos u \sqrt{1+\cos^2 u} \, du,$$

$$y = -a \int \cos^2 u \sqrt{1+\cos^2 u} \, du,$$

$$z = a \int \sin u \sqrt{1+\cos^2 u} \, du,$$

et elles peuvent s'effectuer complètement en prenant

$\frac{u}{2} = t$ comme variable indépendante; la courbe correspondante

$$x = -\frac{4\sqrt{2}}{5} a \cos^5\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{5} a \cos\left(\frac{u}{2}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{15} a \cos\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{4\sqrt{2}}{5} a \sin^4\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right),$$
$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{5} a \sin^5\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{15} a \sin\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{6\sqrt{2}}{5} a \cos^4\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right),$$
$$z = -\frac{4\sqrt{2}}{3} a \cos^3\left(\frac{u}{2}\right)$$

est algébrique.

Exemple II : *Courbes de M. Mannheim. — Les normales principales de ces courbes sont binormales d'une autre courbe* (*voir* E. Goursat, *Analyse*, t. I, p. 559, pour la bibliographie de ces courbes).

Comme on a ici

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{a}{R},$$

il vient

$$\varphi_1(u) = \frac{a(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2};$$

par suite, les coordonnées d'un point de ces courbes seront déterminées par les quadratures

$$x = a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}}\sin u\,du}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2},$$
$$y = -a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}}\cos u\,du}{(1+\psi^2)(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2},$$
$$z = a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}}\psi\,du}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2}.$$

Si, par exemple, on a

$$\psi(u) = u,$$

les formules précédentes deviennent

$$x = \quad a\sqrt{2}\int \frac{\sin u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right),$$

$$y = -a\sqrt{2}\int \frac{\cos u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right),$$

$$z = \quad a\sqrt{2}\int \frac{u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right).$$

[M³1a]

DÉTERMINATION D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE GAUCHE;

PAR M. LANCELOT.

1. Cherchons le degré minimum d'une surface passant par une courbe algébrique gauche de degré m.

Soit une surface de degré p. En général, elle coupe la courbe donnée en mp points, et, si elle contient $(mp+1)$ points de cette courbe, elle la contient tout entière, si elle n'est pas indécomposable.

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface passe par la courbe est donc qu'elle contienne $(mp+1)$ de ses points.

D'autre part, on sait que, en général,

$$\frac{p(p^2+6p+11)}{6} \text{ points}$$

déterminent une surface de degré p, et que, par

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} \text{ points}$$

ne passe, en général, aucune surface de degré p. Il faudra donc, en général, que

$$mp + 1 < \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6},$$

ou que

$$p^3 + 6p^2 + 11p + 6 > 6mp + 6,$$

$$p^3 + 6p^2 - (6m - 11)p > 0,$$

ou

$$p^2 + 6p - (6m - 11) > 0.$$

Ce trinome en p a ses racines de signes contraires si $6m > 11$ ou, m étant forcément entier, si $m \geqq 2$; p étant d'ailleurs entier et positif, il faut donc que p soit plus grand que la racine positive, ou que

$$p > -3 + \sqrt{2(3m-1)}.$$

Le degré minimum cherché est donc supérieur ou au moins égal à la partie entière de $-3 + \sqrt{2(3m-1)}$, augmentée de 1, ou à la partie entière de $\sqrt{2(3m-1)}$, diminuée de 2. Soit

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right]$$

cette partie entière :

$$p \geqq E - 2.$$

Ainsi, le degré minimum d'une surface passant par une courbe du deuxième degré, est

$$-2 + E(\sqrt{2 \times 5}) \quad \text{ou} \quad -2 + E(\sqrt{10}),$$

$-2 + E(\sqrt{10})$ est nul. Donc, quel que soit l'entier p, on pourra, par une courbe du deuxième degré, faire passer une surface de degré p.

Exemples. — 1° En particulier, par une courbe

du deuxième degré indécomposable passe toujours un plan : toute courbe du deuxième degré est plane.

La donnée d'une conique située sur une surface de degré p équivaut d'ailleurs, au point de vue de la détermination de cette surface, à $2p+1$ conditions.

2° Soit une courbe du troisième degré

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = E\left(\sqrt{2\times 8}\right) = E\left(\sqrt{16}\right) = 4.$$

Donc

$$p \geqq 2.$$

Donc, une courbe du troisième degré n'est, en général, pas plane. Par une telle courbe passe toujours une surface du deuxième degré.

La donnée d'une telle courbe équivaut d'ailleurs, pour la détermination de la quadrique, à la donnée de

$$mp+1 = 2\times 3+1 = 7 \text{ points.}$$

Donc, par une cubique gauche, il passe toujours une infinité de quadriques dépendant de deux paramètres. On retrouve ainsi la distinction des cubiques en deux classes :

Cubiques gauches;
Cubiques planes.

3° Soit une courbe du quatrième degré :

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = E\left(\sqrt{2\times 11}\right) = E\left(\sqrt{22}\right) = 4.$$

Donc

$$p \geqq 4-2, \qquad p \geqq 2.$$

On voit donc que, par une courbe du quatrième degré, il passe une quadrique.

La donnée d'une telle courbe équivaut, pour la

détermination de la quadrique, à la donnée de

$$2 \times 4 + 1 = 9 \text{ points}$$

et détermine entièrement cette surface.

Donc, en général, *par une courbe gauche du quatrième degré, il passe une quadrique et une seule : quartique de Steiner.*

On sait d'ailleurs que, si les 9 points sont situés sur la courbe d'intersection de deux quadriques, il passe par ces 9 points un réseau de quadriques, se coupant suivant une courbe gauche du quatrième degré. Donc *il existe une seconde classe de quartiques gauches, intersection de deux quadriques : biquadratiques gauches.*

Enfin la quartique peut être plane.

On retrouve ainsi les trois classes de courbes du quatrième degré, et l'on voit de plus que toute courbe du quatrième degré appartient à l'une de ces trois classes.

4° Soit une courbe du cinquième degré :

$$E[\sqrt{2(3m-1)}] = E(\sqrt{2 \times 14}) = E(\sqrt{28}) = 5.$$

Donc

$$p \geqq 3.$$

Donc, par une courbe du cinquième degré, ne passe, en général, aucune quadrique.

Par une telle courbe passent des surfaces du troisième degré. La donnée de cette courbe équivaut, pour la détermination de cette surface, à

$$3 \times 5 + 1 = 16 \text{ points},$$

et, comme il faut 19 points pour déterminer une surface cubique, par une courbe du cinquième degré

passe, en général, un réseau à trois paramètres de surfaces du troisième degré.

La courbe la plus générale du cinquième degré fait donc partie de l'intersection de deux surfaces cubiques, se coupant en outre suivant une courbe du quatrième degré ($4 + 5 = 9$).

Il peut arriver que, par la courbe, passe une quadrique : il passera en outre une infinité de surfaces cubiques dépendant d'au moins trois paramètres, et l'on a une seconde classe de courbes du cinquième degré, faisant partie de l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique ayant en plus une droite commune.

Enfin la courbe peut être plane.

D'où trois familles de courbes du cinquième degré.

5° Soit encore une courbe du sixième degré :

$$\mathrm{E}\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = \mathrm{E}\left(\sqrt{2\times 17}\right) = \mathrm{E}\left(\sqrt{34}\right) = 5.$$

Donc

$$p \geqq 3.$$

Par une courbe du sixième degré passe, en général, une surface de troisième degré, et pas de surface de degré moindre.

La donnée d'une telle courbe équivaut d'ailleurs, pour la détermination d'une surface cubique, à

$$6 \times 3 + 1 = 19 \text{ points.}$$

Comme, en général, par 19 points, il passe une surface cubique et une seule, il s'ensuit que, en général, par une courbe du sixième degré, il passe une surface cubique et une seule. Il passera d'ailleurs par cette courbe une infinité de surfaces du quatrième degré, et

la courbe sera l'intersection de deux surfaces, une du troisième et une du quatrième degré; cette intersection étant du degré $3 \times 4 = 12$ comprendra donc deux courbes du sixième degré.

Il peut arriver que les 19 points ne soient pas tous distincts, au point de vue de la détermination d'une surface du troisième degré. Alors 18 au plus seront distincts, et il passerait par la courbe un faisceau de surfaces cubiques : ces surfaces cubiques ayant en commun une courbe du neuvième degré, il s'ensuit que le nombre maximum de points distincts sera même inférieur à 18. La courbe est alors l'intersection de deux surfaces cubiques, ayant en outre en commun une courbe du troisième degré.

Enfin, la courbe du sixième degré peut être située sur une quadrique : elle sera son intersection par une surface cubique. Ou encore la courbe peut être plane.

Donc, on a ainsi quatre sortes de courbes du sixième degré.

Remarque. — On voit que :

Toutes les courbes du premier degré (droite) ou du deuxième degré sont planes;

Toutes les courbes du troisième et du quatrième degrés sont tracées sur des quadriques;

Toutes les courbes du cinquième et du sixième degrés sont tracées sur des surfaces cubiques.

La loi très simple, qui semble en évidence sur ces premiers exemples :

Toutes les courbes de degré $2n-1$ et $2n$ sont tracées sur des surfaces de degré n,

se vérifie encore pour les courbes du septième et du

huitième degrés, et pour celles du neuvième et du dixième degrés ; à partir de ce point, elle cesse d'être exacte : toutes les courbes de degrés 11, 12, 13 sont tracées sur des surfaces du sixième degré.

On a, en effet,

$$p \geqq \mathrm{E}\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] - 2,$$

$$m = \begin{cases} 7 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{40}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 4, \\ 8 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{46}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 4, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 9 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{52}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 5, \\ 10 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{58}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 5, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 11 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{64}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6, \\ 12 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{70}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6, \\ 13 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{76}) - 2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6. \end{cases}$$

2. *Nombre des paramètres dont dépend une courbe gauche unicursale de degré m.* — Une courbe algébrique de degré m, C_m, coupe le plan de l'infini en m points. On peut toujours, en faisant au besoin une transformation homographique, supposer l'un d'eux simple. Soit Δ la direction dans laquelle ce point se trouve rejeté à l'infini.

Considérons le cylindre k ayant pour directrice la courbe C, et dont les génératrices sont parallèles à la direction Δ. Ce cylindre est de degré $m-1$; car un plan parallèle à ses génératrices coupe la courbe C en un point à l'infini, et en $m-1$ autres points ; donc il coupe le cylindre k suivant $m-1$ génératrices.

De plus, sur toute génératrice simple du cylindre k se trouve un point et un seul de la courbe C. En effet, le cylindre k ayant la courbe C pour directrice, sur chacune de ses génératrices se trouve au moins un point de la courbe. . . . .

Supposons que sur une génératrice *simple* D se trouvent deux points de la courbe C. Tout plan P passant par cette génératrice coupe le cylindre suivant $m - 2$ autres droites, contenant chacune au moins un point de la courbe : d'où au moins $m - 2$ points communs à la courbe C et au plan P. A ces points il faut ajouter un point à l'infini et les deux points de la génératrice, ce qui ferait $m + 1$ points : ce qui ne se peut.

Cherchons à déterminer la courbe C sur le cylindre k. On pourra pour cela se donner l'abscisse x du point de la courbe situé sur chaque génératrice du cylindre k.

Supposons que le cylindre k soit déterminé par la direction de ses génératrices, et sa base dans un plan fixe P. Supposons, en outre, que l'on ait pu exprimer les coordonnées courantes de cette base en fonction d'un paramètre, au moyen d'une représentation paramétrique algébrique parfaite : c'est-à-dire telle qu'à toute valeur du paramètre λ corresponde un point et un seul de la base, et que, réciproquement, à tout point simple de la base corresponde une valeur et une seule du paramètre λ. Ces conditions sont remplies pour une courbe unicursale : nous ne considérerons, dans ce qui suit, que des courbes telles que le cylindre k que l'on considère soit unicursal; la position d'une de ses génératrices est alors déterminée par la valeur de λ correspondant au point où elle rencontre sa base dans le plan P.

Comme la courbe n'a qu'un point sur chaque génératrice du cylindre k, l'abscisse x du point qu'elle possède sur une génératrice λ sera liée à λ par une relation linéaire en x, qui, résolue par rapport à x, sera de la forme

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

f et φ étant deux polynomes : *la courbe* C *est alors*

elle-même unicursale. L'x d'un point de la courbe est, par exemple, la longueur de la génératrice qui le comprend, comprise entre ce point et le plan de la base. Donc, les points d'intersection de la courbe et d'un plan parallèle au plan de base sont donnés par l'équation

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

où λ est regardée comme l'inconnue. La courbe étant de degré m, il y a m points répondant à la question. L'équation en λ est donc de degré m, et par suite les polynomes f et φ sont de degré m.

Enfin, un point de la courbe C peut s'éloigner à l'infini de deux manières :

1° Sur une des $(m-2)$ génératrices du cylindre situées dans le plan de l'infini. Sur chacune d'elles se trouve un point et un seul de la courbe. Soient λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ les paramètres de ces génératrices : ce sont des quantités parfaitement déterminées.

2° Un point et un seul de la courbe se trouve à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre k.

L'asymptote correspondante de la courbe est alors une génératrice du cylindre, qui peut d'ailleurs être quelconque. Soit λ_0 son paramètre.

Or x ne peut devenir infini, et le polynome $\varphi(x)$ ne peut devenir nul que si le point M s'éloigne de l'infini ; $\varphi(x)$ a donc pour racines $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ qui sont des nombres déterminés dès que l'on connaît le cylindre k et la représentation choisie pour la base du cylindre k : le choix de cette représentation n'influe d'ailleurs pas sur la courbe C et, en faisant varier cette représentation, on ne fait pas varier la courbe C. Dans ces conditions, le polynome $\varphi(\lambda)$ ne comprend, à un facteur constant

près, que l'on peut faire rentrer dans le polynome $f(\lambda)$, qu'une seule arbitraire, λ_0 :

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{m-1}).$$

D'ailleurs le polynome $f(\lambda)$ est un polynome arbitraire et contient $(m+1)$ arbitraires; donc l'expression $x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ contient $m+2$ paramètres arbitraires.

Inversement, une courbe quelconque définie par le procédé ainsi indiqué est une unicursale de degré m. Car prenons pour axe des x une parallèle aux génératrices du cylindre k, et pour plan des yz le plan de base de ce cylindre; soient

$$y = \psi(\lambda), \qquad z = \theta(\lambda)$$

les coordonnées courantes de sa base en fonction d'un paramètre : la base étant unicursale de degré $(m-1)$, ψ et θ sont des fonctions rationnelles de λ, de degré $m-1$. Comme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont les paramètres des points à l'infini de la courbe, les dénominateurs sont identiques à $(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{m-1})$, et l'on peut écrire

$$y = \frac{\psi(\lambda)(\lambda - \lambda_0)}{\varphi(\lambda)}, \qquad z = \frac{\theta(\lambda)(\lambda - \lambda_0)}{\varphi(\lambda)},$$

avec en plus

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

La courbe est donc bien unicursale et du degré m.

Ainsi, étant donné un cylindre unicursal quelconque de degré $m-1$, il existe, sur ce cylindre, une infinité de courbes unicursales de degré m, dépendant de $m+2$ paramètres.

Reste à chercher de combien de paramètres dépend un tel cylindre. On peut le déterminer par la direction

de ses génératrices, d'où deux paramètres, et par sa base dans un plan donné.

Or, cette base est une courbe de degré $m - 1$, ayant le nombre maximum de points doubles que comporte son degré : c'est-à-dire $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$. Or, la connaissance d'une courbe de degré $m - 1$ (plane) dépend de $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ paramètres. Le fait qu'elle doit avoir un point double équivaut à dire que, $f(xyz) = 0$ étant son équation homogène, les trois équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0$$

ont un système de solutions; ce qui équivaut à une condition. Le fait qu'elle est unicursale vaut donc

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2} \text{ conditions :}$$

et il reste

$$\frac{(m-1)(m+2)-(m-2)(m-3)}{2} = 3m - 4 \text{ paramètres.}$$

Une courbe unicursale plane de degré $m - 1$ dépend donc de $3m - 4$ paramètres.

Exemple :

$m = 2\ldots$ la droite dépend dans le plan de 2 paramètres
$m = 3\ldots$ une conique dépend de 5 paramètres
$m = 4\ldots$ une cubique à point double dépend de 8 paramètres

Un cylindre unicursal de degré $m - 1$ dépend donc de $3m - 2$ paramètres.

Enfin, comme sur un tel cylindre se trouve une infinité de courbes unicursales gauches de degré m, dépendant de $m + 2$ paramètres, on voit que :

La détermination d'une courbe unicursale gauche de degré m dépend de

$$3m - 2 + m + 2 = 4m \text{ paramètres.}$$

Remarque. — La démonstration ne s'applique pas à la ligne droite. Cependant la formule donne, en y faisant $m = 1$, le nombre des paramètres dont dépend une droite : 4.

On sait que toute courbe du deuxième degré est unicursale, et qu'il en est de même de toute cubique gauche. La formule peut donc s'appliquer pour toutes les courbes du deuxième degré; une conique dépend de $4 \times 2 = 8$ paramètres : 3 pour son plan, 5 pour la déterminer dans son plan.

Elle s'applique aussi à toutes les cubiques gauches : une cubique gauche dépend de $4 \times 3 = 12$ paramètres. Comme un point équivaut, pour la connaissance d'une courbe, à deux conditions, on voit que par 6 points passent un nombre fini de cubiques gauches. On peut voir d'ailleurs qu'il n'y en a qu'une; car le cône de degré 2 qui a pour sommet l'un des 6 points et qui passe par la courbe est parfaitement déterminé, et l'on a 6 cônes du deuxième degré passant par la courbe.

Enfin, on sait que les quartiques se décomposent en trois familles : quartiques de Steiner par lesquelles ne passe qu'une seule quadrique; biquadratiques gauches et quartiques planes. Les quartiques de Steiner sont unicursales. Donc une quartique de Steiner dépend de $4 \times 4 = 16$ paramètres.

Comme on sait que par 8 points passe une biquadratique gauche et une seule, la biquadratique gauche dépend aussi de 16 paramètres.

Le problème du nombre de paramètres dont dépend une courbe gauche est donc complètement résolu pour le quatrième degré.

[L¹10a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA PARABOLE;

PAR M. V. JAMET.

Dans l'Article que j'ai publié au mois de juin (concours de l'École Polytechnique, solution géométrique), je suppose connue, ou tout au moins aisément démontrable, la proposition suivante :

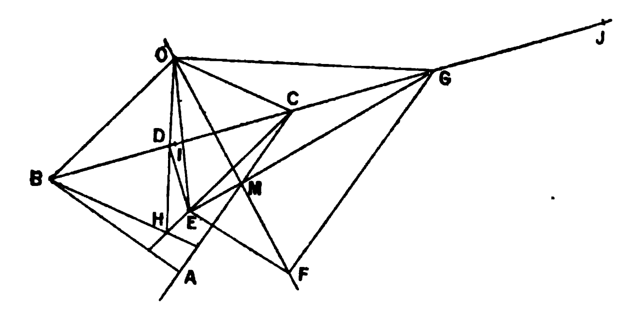
Dans la strophoïde, les cordes dont les extrémités sont sur deux rayons vecteurs issus du point double et également inclinés sur les tangentes en ce point, enveloppent une parabole.

Cette proposition intervient seulement à la fin de l'Article, et le lecteur en aura certainement fait une vérification analytique. La démonstration géométrique en est peut-être moins immédiate, et voici la forme, ou tout au moins une des formes, qu'on peut lui donner.

Rappelons d'abord que toute strophoïde est, par rapport à une parabole, la podaire d'un point situé sur la directrice de cette parabole, et que ce point est le point double de la strophoïde. Soient donc O le point double d'une strophoïde, OH la directrice de la parabole correspondante, F le foyer de cette parabole, BC une droite qui lui est tangente. Sur cette droite se trouvent trois points de la strophoïde; l'un d'eux est la projection du point O sur BC. Nous désignons les deux autres par B et C, et nous aurons démontré notre théorème si nous faisons voir que les deux droites OB, OC sont

également inclinées sur les tangentes menées du point O à la parabole.

A cet effet, cherchons à déterminer les deux tangentes à la parabole autres que BC, issues, l'une de B, l'autre de C. Elles forment avec BC un triangle ABC dont l'orthocentre H se trouve sur la directrice de la parabole donnée; et comme OB et OC sont respectivement perpendiculaires à AB et AC, la figure OBHC est un parallélogramme et le point de rencontre D de ses diagonales est au milieu de BC. Donc le centre E du cercle circonscrit au triangle ABC se trouve sur la



droite menée de D perpendiculairement à BC, et l'on observera que cette droite DE est tangente à la parabole. Ce même cercle circonscrit passe par le point F; je dis qu'il passe aussi par le point O. En effet, BC est la tangente au sommet d'une parabole de foyer O et tangente aux deux droites AC, AB, puisque celles-ci sont perpendiculaires à OC et à OB, respectivement. Donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est sur la droite menée du milieu M de la droite OF, perpendiculairement à OF. Cette droite est encore une tangente à la parabole : le point où elle coupe DE est le centre cherché, et la détermination des points BC n'offre plus de difficulté (EC = EB = EF).

Cherchons encore à déterminer les points I, J, où la droite BC est coupée par les tangentes menées du point O à la parabole. A cet effet, observons que ces deux droites OI, OJ sont rectangulaires et que, dans toute conique, la portion d'une tangente comprise entre deux tangentes rectangulaires est vue du foyer sous un angle droit. Donc l'angle IFJ doit être droit, et les quatre points O, I, J, F doivent être sur une circonférence ayant pour diamètre IJ. Son centre G est donc sur la droite EM; de là la détermination immédiate des points I, J.

Je dis encore que ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à B, C, c'est-à-dire que l'on a

$$GB.GC = \overline{GI}^2,$$

ou bien

$$GB.GC = \overline{GO}^2,$$

ou bien encore que les deux cercles E, G, que nous avons déterminés, se coupent à angle droit, ou enfin que les deux droites EO, OG sont rectangulaires. Mais ces deux droites forment une figure symétrique de l'angle EFG par rapport à la droite EG, et cet angle EFG est droit, parce que EG est encore une portion de tangente à la parabole, comprise entre deux tangentes rectangulaires.

Donc enfin les quatre droites OB, OC, OI, OJ forment un faisceau harmonique dont deux rayons conjugués sont rectangulaires. Ce sont donc les bissectrices des angles formés par les deux autres rayons.

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE.

M. G. — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1902 (p. 286), M. Mannheim a donné ce théorème :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point m d'une conique E *sur les côtés d'un triangle inscrit dans cette courbe appartiennent à un cercle qui passe par un point fixe, quel que soit le triangle. Ce point est sur le diamètre de* E *qui passe par le point de Frégier g relatif à m, l'harmonique conjuguée de g par rapport aux extrémités de ce diamètre.*

Lorsque la conique est une hyperbole équilatère, le point fixe obtenu est donc le centre de l'hyperbole. On arrive ainsi à la propriété dont s'est servi récemment M. Fontené (1905, p. 260) pour démontrer le théorème de Feuerbach. Une démonstration élémentaire de la propriété en question avait un certain intérêt.

Pour construire un triangle donné par les points remarquables O, I, H, on doit construire d'abord (1905, p. 241) la formule suivante :

$$R = \frac{\overline{OI}^2}{2\Omega I}, \qquad 2r = R - 2\Omega I.$$

Prolongeons HI de sa longueur jusqu'à S; nous aurons

$$R \times OS = \overline{OI}^2, \qquad 2r = R - OS.$$

Le cercle tangent en I à OI, et qui passe en S, coupe OS au point T, et l'on a

$$R = OT, \qquad 2r = ST.$$

M. **Parrod.** — La solution de la cinquième question du problème d'Agrégation, parue dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales,* me paraît incomplète.

Quand le point h est entre H et H′, le grand axe n'est pas OT; qh est maximum en même temps de QH, les angles POH et P′OH′ sont alors de 45° et la droite HH′ passe par le centre de similitude des cercles OP et OP′. On voit ainsi que les sommets non situés sur PP′ décrivent deux droites passant par le centre de similitude et que le cercle principal correspondant est tangent aux tangentes communes des deux cercles. Quand m est égal à $\pm \frac{OP}{OP'}$, l'ellipse se réduit à un segment de droite.

CERTIFICATS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de l'absorption de la lumière par les cristaux translucides possédant trois plans rectangulaires de symétrie de contexture.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans une certaine tourmaline, l'ellipsoïde inverse d'absorption, pour une certaine couleur du spectre, a son axe de révolution triple de son axe équatorial (représentatif, par l'inverse de son carré, du coefficient d'absorption des vibrations du rayon ordinaire); et de plus, sur un trajet de* 1^{mm}, *dans une plaque taillée parallèlement à l'axe optique, se trouve réduite de moitié, dans la même tourmaline, l'intensité lumineuse d'un rayon extraordinaire de la couleur dont il s'agit, entré sous l'incidence normale.*

On demande quelle épaisseur de cette plaque sera nécessaire pour y réduire l'intensité lumineuse du rayon ordinaire au centième de celle du rayon extraordinaire, l'un et l'autre étant censés avoir même intensité au départ, ou provenir d'un pinceau de lumière naturelle entré normalement dans la plaque. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Lois des ondes lumineuses planes dans un corps transparent homogène, mais hétérotrope,*

quand on néglige la dispersion et la polarisation rotatoire.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un cristal transparent, rapporté à ses axes principaux et où se propage un système d'ondes planes, les angles* α, β, γ *de la normale à ces ondes avec les* x, y, z *positifs et les angles analogues* α', β', γ' *de la vibration avec les mêmes* x, y, z *positifs vérifient la relation*

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a^2}+\frac{\cos\beta\cos\beta'}{b^2}+\frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c^2}=0.$$

Cela posé, l'on donne

$$\frac{b}{a}=1,\qquad \frac{c}{a}=0,9,\qquad \cos\beta=0,$$

et l'on demande quelles sont les deux inclinaisons possibles de la vibration sur le plan de l'onde, quand l'axe des z *ou axe optique est lui-même incliné à* 45° (*c'est-à-dire d'un demi-angle droit*) *sur ce plan.*

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Pouvoir refroidissant d'un fluide sur un plateau.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Comparaison des pouvoirs refroidissants d'un cylindre et d'une sphère.*

(Juillet 1904.)

CERTIFICATS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une surface variable* Σ *est seulement assujettie à limiter, avec le carré* PQRS *du plan* xOy, *un volume donné* V.

Calculer l'intégrale de surface suivante, étendue à

l'une quelconque des surfaces Σ,

$$\int\int_{(\Sigma)} \left(\varphi e^y + \frac{\partial\psi}{\partial y} e^z + mx + ny + pz + q\right) dy\, dz$$
$$- \left(\frac{d\varphi}{dx} e^y + m'x + n'y + p'z + q'\right) dz\, dx$$
$$- \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} e^z + m''x + n''y + p''z + q''\right) dx\, dy,$$

où φ *désigne une fonction continue de* x; ψ *une fonction continue de* x *et de* y; *et* m, n, ..., p'', q'' *des constantes.*

Les coordonnées x *et* y *des points* P, Q, R, S *sont respectivement :*

Pour P.......	$x = -1$	$y = -1$
» Q.......	$x = +1$	$y = +1$
» R.......	$x = +1$	$y = +1$
» S.......	$x = +1$	$y = -1$

II. *Par chaque point* M *d'une courbe* C *on mène une droite* MN *de longueur donnée et constante et faisant avec la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe* C *des angles donnés et constants.*

Lorsque le point M *décrit la courbe* C, *le point* N *décrit une courbe* γ.

Trouver la condition que doivent remplir les données pour que le plan normal à la courbe γ, *en chacun de ses points* N, *passe par le centre de courbure (centre du cercle osculateur) de la courbe* C *relatif au point correspondant* M.

Interpréter les résultats.

Épreuve pratique. — *Exposer brièvement la méthode de Cotes pour le calcul approché des intégrales définies.*

Calculer les quatre coefficients K *lorsque le nombre des points de division (en y comprenant les deux points extrêmes) est égal à* 4.

On se servira de ces résultats numériques pour calculer

une valeur approchée de l'intégrale définie

$$\int_1^3 \frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{x(x-8)}\,dx.$$

(Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver la surface enveloppe* E *de la famille de cônes représentés par l'équation*

$$(\theta x + x + y + z - 1)(\theta y + z) - \theta x(x + y + z - 1) = 0,$$

où θ *désigne le paramètre.*

II. *Montrer que la surface du quatrième degré* E *peut être engendrée par une droite s'appuyant sur les deux droites*

$$\Delta \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

$$\Delta' \begin{cases} z = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

On fera voir, en passant, que Δ *et* Δ' *sont des droites doubles de la surface et l'on écrira les équations des deux plans tangents à la surface* E *en chaque point de* Δ.

III. *La droite*

$$G \begin{cases} x = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

est aussi une droite double de la surface; écrire l'équation du plan tangent à la surface E *en chaque point de* G *et étudier rapidement la variation de ce plan tangent lorsque le point se déplace sur la droite* G.

IV. *Les coordonnées des divers points de* E *étant exprimées, d'après les résultats de la deuxième question, en fonctions de deux paramètres, on déterminera les lignes asymptotiques de cette surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les candidats traceront sur leur*

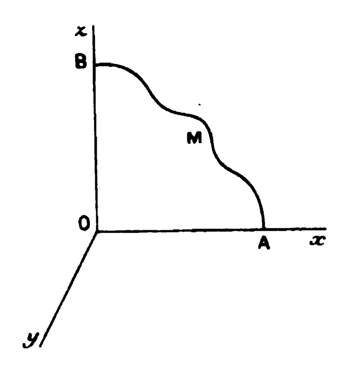
copie une courbe située dans le plan zOx *et analogue à celle de la figure ci-contre.*

On prendra

$$OA = 0^m,10,$$

$$OB = 0^m,12.$$

Calculer, en employant la méthode de Simpson, quelques



valeurs approchées du volume engendré par l'aire OAMB *tournant autour de* Oz.

Les candidats emploieront les deux heures qui leur sont données de manière à obtenir le plus grand nombre possible de valeurs approchées. On divisera l'intervalle OB *successivement en* 2, 4, 6, ... *parties égales.*

(Novembre 1904.)

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *Les génératrices rectilignes d'une surface réglée* S *rencontrent toutes l'axe des* z. S *admet pour courbe asymptotique la cubique*

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Construire : 1° *la surface* S; 2° *les courbes asymptotiques* M *de* S; 3° *les trajectoires orthogonales* N *sur* S *des courbes* M.

Les coordonnées sont rectangulaires.

SOLUTION.

S est le conoïde

$$zx^2 = y^2.$$

Les courbes M sont les cubiques

$$y = \alpha x^2, \qquad z = \alpha^2 x^3 \qquad (\alpha = \text{param. arb.}).$$

Les courbes N sont découpées sur S par les ellipsoïdes

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \beta \qquad (\beta = \text{param. arb.}).$$

II. *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{\sqrt{z-1}}{z^2} dz, \qquad \text{où} \qquad z = x + y\sqrt{-1},$$

prise, dans le sens direct, le long du cercle $x^2 + y^2 = R^2$.

(Novembre 1904.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

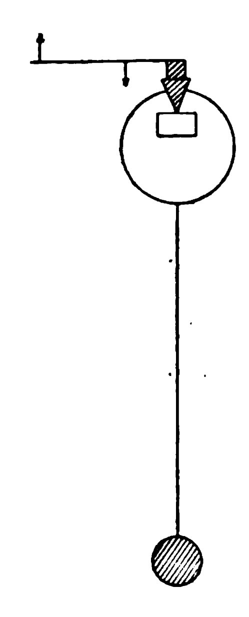
ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mouvements réels d'un solide indéfini dont chaque point décrit une trajectoire sphérique.*

2° *A quelle variété se réduit un pareil mouvement quand un point du solide décrit un cercle?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule dont le centre de gravité est à* 2^m *au-dessous de l'arête du couteau de suspension est pressé sur un cylindre de* $0^{mm},25$ *de rayon par une force égale à son poids.*

Après six oscillations simples, la demi-amplitude a subi une diminution de $30''$.

Calculer le coefficient de frottement entre le petit cylindre et le contact frottant.



On néglige la résistance de l'air et le frottement de roulement sur l'arête du couteau. (Juillet 1904.)

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Étude cinématique du mouvement d'un système invariable qui a un point fixe.*

2° *Un point matériel, de masse m, est soumis à l'action de la force centrale et attractive* $\frac{m\mathrm{R}}{r^2}$, R *désignant une constante et r la distance du point au centre d'attraction. A un certain instant, il est en un point donné* A *et a une vitesse connue v.*

Déterminer la direction de cette vitesse, sachant que la trajectoire passe par un second point donné B.

Discussion.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le centre de gravité d'un onglet sphérique homogène :*

Rayon de la sphère.............	0,237
Angle d'ouverture de l'onglet...	63°21'35"

(Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mouvement relatif d'un point matériel; forces apparentes, leur expression analytique.*

2° *Appliquer le principe des vitesses virtuelles à la détermination de la position d'équilibre de deux sphères homogènes pesantes appuyées l'une contre l'autre et contre deux plans dont l'intersection est horizontale.*

On néglige les frottements.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un trièdre trirectangle* $Oxyz$; *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy, *un point* C *sur* Oz; *enfin, la perpendiculaire* CD *abaissée de* C *sur* AB.

On demande de déterminer les éléments de la réduction canonique du système de vecteurs

$$\overline{OA},\quad \overline{OB},\quad \overline{CD},$$

sachant que

$$\overline{OA} = 1,\qquad \overline{OB} = 2,\qquad \overline{OC} = 1.$$

On calculera les angles de l'axe central avec les axes Ox, Oy, Oz *et les coordonnées du point où il coupe le plan* xOy. (Novembre 1904.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un ellipsoïde représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

est rempli d'une masse homogène S *douée d'un pouvoir attractif suivant la loi de Newton : calculer l'attraction* Z *subie par un point* M *situé sur l'axe des* z *à l'intérieur de l'ellipsoïde. Mouvement que prendrait ce point, d'abord*

en repos, si la masse S *était fluide, n'opposant au mouvement de* M *qu'une faible résistance proportionnelle à la vitesse.*

SOLUTION.

$$Z = -\frac{16}{3}\mu\pi z\left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

II. *Une plaque très mince, homogène, de poids* $2mg$, *a la forme d'un triangle équilatéral* OPQ, *de côté* $2a\sqrt{3}$, *dont le sommet* O *est fixe, tandis que le sommet* P *est assujetti à se mouvoir sur une circonférence horizontale ayant son centre en* O. *Équations générales du mouvement de la plaque; conditions pour que l'angle de la plaque avec l'horizon soit constant. Étudier le mouvement quand les vitesses initiales sont nulles; cas des petites oscillations.*

SOLUTION.

Prenant comme axes mobiles les axes principaux en O, on détermine la position de la plaque à l'aide des trois angles d'Euler, φ restant égal à $\frac{\pi}{6}$; on écrira les équations de Lagrange, où

$$2T = ma^2\left[3\theta'^2 + (7 + 3\cos^2\theta)\psi'^2 - 4\sqrt{3}\,\theta'\psi'\sin\theta\right].$$

On trouve que, pour que θ soit constant, il faut que ψ' le soit lui-même avec la valeur $\sqrt{-\frac{2g}{3a\sin\theta}}$. Quand la plaque part du repos, l'équation relative à ψ et celle des forces vives donnent

$$\psi' = \frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{7 + 3\cos^2\theta}\theta', \qquad \theta'^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{a}\frac{7 + 3\cos^2\theta}{3 + 7\cos^2\theta}(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

CALCUL. — *Un point pesant, assujetti à se mouvoir sur une sphère de* 2^m *de rayon, a été lancé dans des conditions telles que sa trajectoire reste comprise entre le plan horizontal qui passe par le centre et le plan parallèle situé à* 1^m *au-dessous. Calculer, à* $0^s,0001$ *près, le temps nécessaire au mobile pour passer du point le plus haut au point le plus bas de cette trajectoire en supposant* g *égal à* π^2.

Solution.

$$T = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\,dz}{\sqrt{gz(1-z)(4+z)}} = 0^s,6674.$$

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Une circonférence homogène, pesante, de masse m, de rayon a, est assujettie, par des liaisons sans frottement, à toucher un plan fixe* x_1Oy_1 *en un point fixe* O.

1° *Former les équations différentielles du mouvement par la méthode de Lagrange.*

2° *Retrouver les intégrales premières de ces équations par l'emploi direct des théorèmes généraux.*

3° *Montrer que ces équations s'intègrent par des quadratures.*

4° *A un instant donné, on introduit brusquement de nouvelles liaisons sans frottement et persistantes, qui fixent le plan de la circonférence; l'état des vitesses étant connu immédiatement avant l'introduction des liaisons, trouver l'état ultérieur des vitesses.*

Épreuve pratique. — *Sur une cuvette hémisphérique fixe* T, *de rayon* R, *et dont la concavité est tournée vers le haut, on place une petite bille homogène pesante, de rayon r, et on l'abandonne* sans vitesse.

I. *Étudier le mouvement de la bille.*

II. *Trouver la durée des oscillations infiniment petites de la bille lorsque sa position est initiale et très voisine du point le plus bas de* T.

III. *La position initiale étant quelconque, déterminer la réaction de* T *lorsque la bille est aussi bas que possible.*

Pour chacune des trois questions qui précèdent, on envisage successivement les deux hypothèses suivantes :

1° *La bille peut glisser et rouler; il n'y a pas de frottements;*

2° *La bille ne peut que rouler; il n'y a pas de frottement de roulement.*

Applications numériques (*unités* C.G.S.) :

$$R = 100, \qquad r = 1, \qquad g = 981, \qquad m = 30.$$

En appelant θ *l'angle de la normale commune extérieure aux deux sphères limitant la cuvette et la bille avec la verticale descendante, pour la question* III, *on supposera la valeur initiale de* θ *égale à* 60°.

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *Une barre* AB *pesante, homogène, solide, de longueur* $2l$, *est attachée par son extrémité* A *à un fil flexible, inextensible, sans masse, de longueur* L, *avec un bout fixe* O.

Au début du mouvement, la figure OAB *est dans un plan vertical* P, *et le fil est tendu. On lance la barre dans le plan* P *d'une façon quelconque, mais telle toutefois que le fil reste d'abord tendu.*

Étudier le mouvement.

II. *Un point* M *décrit une trajectoire* C, *dont les équations par rapport au trièdre trirectangle* $Oxyz$ *des coordonnées sont* (t *est le temps*) :

$$x = \sum_n \frac{t^{3n}}{(3n)!}, \qquad y = \sum_n \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!}, \qquad z = \sum_n \frac{t^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Soient

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

$\Delta = xy + yz + xz$;

MV *le vecteur vitesse;*

MΓ *le vecteur accélération;*

R *le rayon de courbure;*

T *le rayon de torsion.*

Calculer : les longueurs MV *et* MΓ; *les cosinus des angles* $\widehat{OMV}$, $\widehat{OM\Gamma}$, $\widehat{VM\Gamma}$; *les accélérations normale et tangentielle; les rayons* R *et* T.

Montrer notamment que

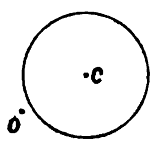
$$\overline{O\Gamma}^2 . \overline{\Gamma V}^2 = \frac{4\rho^6}{R^2} = -4T$$

et que les quantités à calculer sont toutes exprimables en Δ *et* ρ. (Novembre 1904.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, on place une cheville horizontale* O *qui est dépolie.*

Un disque circulaire $\mathcal{C}$, *pesant et homogène, est abandonné sans vitesse initiale et vient heurter contre la*



cheville O *après une chute d'une hauteur h égale à quatre fois son diamètre.*

Trouver le mouvement de ce disque après le choc, sachant que les corps choqués sont mous et que, au moment du choc, le rayon qui passe par la cheville fait un angle de 30 *degrés avec l'horizontale. Le coefficient de frottement entre le disque et la cheville est égal à* $\frac{1}{10}$.

Trouver au préalable quelle doit être la hauteur h de la chute initiale du disque pour que, après le choc, le disque ne reste pas appuyé sur la cheville et ne la rencontre pas encore une fois.

SOLUTION.

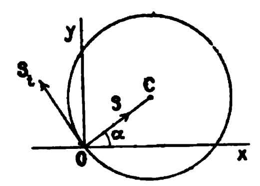
Le disque, dont le moment d'inertie par rapport à son centre est $\frac{1}{2}MR^2$, commence par tomber verticalement d'un mouvement de translation dont la vitesse au moment du choc est $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Mettons l'indice o pour désigner le commencement du choc

et l'indice 1 pour en désigner la fin, nous aurons, en prenant la verticale Oy vers le haut,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -v_0.$$

Soit S la composante normale de la percussion qui se produit en O pendant le choc; la composante tangentielle en sera S_f tant qu'il y aura glissement. Soit σ l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} S\,dt$ qui mesure la percussion en quantité de mouvement. Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité et celui des moments des quantités de mouvement par rapport au centre de gravité. Soit ω la vitesse angulaire de la rotation positive de gauche à droite. Soient x, y les coordonnées du centre de gravité. Nous aurons



$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \sigma(\cos\alpha - f\sin\alpha),$$

$$M\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + Mv_0 = \sigma(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}MR^2\omega_1 = f\sigma R.$$

A la fin du choc, la vitesse du point O du disque, estimée suivant la normale OC, doit être nulle. Comme la vitesse de ce point résulte de la translation du centre C et de la rotation ω, on a, pour cette composante normale,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \cos\alpha + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \sin\alpha = 0$$

ou

$$\frac{\sigma}{M} - v_0 \sin\alpha = 0.$$

On a donc, après le choc,

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 &= \quad v_0 \sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha),\\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 &= -v_0\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha),\\ \mathrm{R}\omega_1 &= \quad w_0 f\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Mais ce n'est vrai que s'il y a eu glissement pendant tout le choc en sens contraire de S_t. Autrement dit, la vitesse de O, estimée suivant S_t, doit être négative pendant toute la durée du choc.

A la fin du choc, elle est

$$-\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \sin\alpha + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \cos\alpha + \mathrm{R}\omega_1 = -v_0(\cos\alpha - 3f\sin\alpha).$$

On doit donc avoir

$$\cos\alpha - 3f\sin\alpha > 0,$$

c'est ce qui arrive avec les données du problème.

On verrait, du reste, que cette quantité est négative pendant tout le choc, en remarquant que, pendant la durée du choc, la valeur de σ est $\varepsilon v_0 \sin\alpha$, où ε est compris entre 0 et 1.

Connaissant par les formules (A) le mouvement à la fin du choc, il s'agit de trouver le mouvement qui suivra. Mais ce mouvement ne sera pas le même si le disque reste appuyé sur O ou s'il se sépare de O.

Si le disque se sépare du point O, son mouvement sera le suivant : le centre de gravité se mouvra comme un point pesant et décrira une parabole avec une vitesse de rotation constante égale à ω_1.

Examinons s'il peut en être ainsi. La parabole décrite par le centre de gravité donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1, \qquad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 - gt$$

et

$$\begin{aligned} x &= \quad v_0 \sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t + \mathrm{R}\cos\alpha,\\ y &= -v_0\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 + \mathrm{R}\sin\alpha.\end{aligned}$$

La distance de ce point à l'origine donne

$$x^2+y^2 = R^2 + t^2[v_0^2(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2 - Rg\sin\alpha] + v_0 g\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

Cette quantité est plus grande que R^2 si l'on a

$$v_0^2(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2 - Rg\sin\alpha + v_0 g\cos\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)t + \tfrac{1}{4}gt^2 > 0.$$

Le discriminant de ce trinome en t est

$$g^2\sin\alpha[Rg - v_0^2\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2].$$

Si l'on a

$$h > \frac{R}{2\sin\alpha(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2},$$

on aura d'autre part

$$v_0 = 2gh$$

et l'on verra que le discriminant est positif.

L'inégalité est vérifiée pour $h = 4R$.

On voit ainsi que x^2+y^2 est toujours plus grand que R^2 et, par suite, le disque se sépare du point O et ne rencontre plus ce point. C'est donc le mouvement que l'on vient d'indiquer.

Épreuve pratique. — *A deux points fixes* A *et* B, *situés sur une même horizontale et distants de* 4^m, *on suspend un fil de* 8^m *de long, pesant et homogène, qui pèse* 1^{kg} *par mètre courant; ce fil prend la forme d'une chaînette.*

On coupe le fil en deux points C *et* D *situés sur une même horizontale et distants de* 2^m, *puis on attache en* C *et* D *une barre pesante et homogène.*

Quel doit être le poids de cette barre pour que les points C *et* D *conservent la position qu'ils occupaient précédemment?*

Solution.

$2^{kg},41$. (Juillet 1905.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un disque circulaire, de rayon* R *et de masse* M, *infiniment mince, homogène et pesant, est traversé suivant un diamètre par une tige rigide, rectiligne, infiniment mince et sans masse, à laquelle il est invariablement lié. La tige est terminée, d'un côté, en un point* O *de la circonférence du disque, de l'autre en un point* A *situé hors du disque. Le point* O *est fixe; la tige est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle horizontal fixe dont le centre est placé sur la verticale ascendante du point* O.

1° *Établir les équations du mouvement de ce système, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Examiner le cas particulier suivant :*

$$R = 2, \qquad M = 1,$$

le rayon du cercle fixe est égal à la distance de son centre au point O; *à l'époque initiale, le plan du disque est vertical, le système est animé d'une rotation instantanée de vitesse angulaire égale à* $\sqrt{5}$ *autour d'un axe* OI *mené dans le plan du disque et faisant avec la verticale ascendante, du côté de* OA, *un angle dont la tangente est égale à* 3.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit* Δ *un axe fixe. Soit* D *une droite qui rencontre* Δ *et ne lui est pas perpendiculaire.* D *est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de* Δ. *Un point matériel* M *est assujetti à rester sur* D *et est attiré par l'axe* Δ *avec une force proportionnelle à la distance de* M *à* Δ. *Trouver le mouvement du point* M.

(Juillet 1905.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Mouvement d'un point pesant sur une surface polie. Cas spécial des petits mouvements; expression des périodes en fonction des rayons de courbure principaux.*

II. *Directions invariantes dans une déformation homogène. Déformation pure.*

Épreuve pratique. — *Une plaque homogène très mince ayant la forme d'un triangle rectangle est mobile autour d'un des côtés de l'angle droit. Déterminer le centre de percussion correspondant.*

Dimensions :

Côté de l'axe .... $a = 2^{m}$
Côté perpendiculaire .... $b = 3^{m}$

La plaque étant supposée au repos vient à être frappée normalement à son plan au centre de percussion, par un projectile qui s'y incruste.

Trouver la vitesse initiale de rotation du système.

Poids du projectile : 7^{k}.

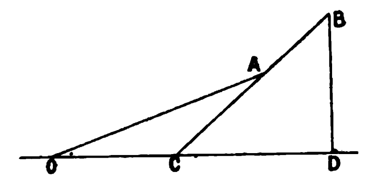
Vitesse du projectile au moment du choc : 100 m : sec.

Poids spécifique de la plaque par décimètre carré : 20^{g}.

(Juillet 1905.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Une barre prismatique homogène pesante* OA, *dont la section est très petite, peut tourner*



autour d'un point O, *dans un plan vertical. Elle s'appuie par son extrémité* A *sur un plan incliné* BCD *situé dans le même plan vertical et ce plan peut glisser sans frottement le long d'un plan horizontal passant par* O. *Étudier le mouvement du système.*

—

II. *Une sphère homogène pesante est assujettie à se mouvoir sur un plan horizontal dépoli de façon qu'il y ait roulement sans glissement. Chacun des points* M *de la*

sphère est attiré par un point fixe O *du plan horizontal proportionnellement à la distance* OM *et à sa masse. On demande d'étudier le mouvement de la sphère et de déterminer la réaction du plan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un triangle isoscèle* ABC *rectangle en* A *est tracé dans un plan* P *qui glisse sur un plan fixe* Q.

Le mouvement de ce plan est à chaque instant la résultante de trois rotations ω_1, ω_2, ω_3 *qui se font respectivement autour des points* A, B, C (ω_1, ω_2, ω_3 *sont des fonctions données du temps*).

Déterminer à chaque instant le centre instantané et trouver les deux courbes dont le roulement peut servir à définir le mouvement du plan P.

On prendra les droites AB, AC *pour axes mobiles des* x *et des* y; *on supposera que, à l'origine du temps, les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, et l'on achèvera les calculs dans l'hypothèse où l'on aurait*

$$\omega_1 = 1 + 2\tang t - \tang^2 t,$$
$$\omega_2 = -2\tang t,$$
$$\omega_3 = \tang^2 t.$$

Vérifier que, dans ce cas, le point C *décrit une chaînette.*

(Juillet 1905.)

ERRATA.

Page 274, ligne 10 en descendant, *au lieu de :* M, *lire :* m.
» ligne 15 en descendant, *au lieu de :* M, *lire :* P.
» ligne 16 en descendant, *au lieu de :* N, *lire :* Q.

Nous avons omis de signaler les *Solutions* suivantes reçues :

N° 2002, M. VALÈRE MAËS.
N° 2007, M. H. LEZ.

TABLE DES MATIÈRES.

Septembre 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

OCTOBRE 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris :
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers. M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[M'2h]

DÉCOMPOSITION D'UNE CORRESPONDANCE TANGENTIELLE ENTRE DEUX COURBES UNICURSALES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Ce Mémoire est indépendant de celui qui a paru ailleurs ([1]) pour le cas de deux courbes de genres p et p'; l'hypothèse que les deux courbes sont unicursales conduit naturellement à des résultats plus nets, qui s'obtiennent par un traitement plus simple. Je signalerai en particulier le théorème donné au n° **12**.

I.

1. Soient deux variables t et t' liées par une relation algébrique $F(t, t') = 0$, du degré n en t, du degré m' en t'; une valeur de t' donne n valeurs pour t, une valeur de t donne m' valeurs pour t', et l'on dit que les deux variables ont une correspondance algébrique (n, m'); on peut représenter la relation $F = 0$ par une courbe F, qui est d'ordre $n + m'$, avec un point multiple d'ordre m' à l'infini sur l'axe des t, un point multiple d'ordre n à l'infini sur l'axe des t'. Lorsque, pour une certaine valeur de l'une des variables, deux des valeurs de l'autre variable sont égales, on dit qu'il y a pour celle-ci une *coïncidence*. Le nombre des coïncidences de deux valeurs de t (tangentes parallèles à

([1]) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV.

l'axe des t) est

$$m' \times 2(n-1),$$

comme on peut le voir en appliquant le principe de correspondance de Chasles à la correspondance qui lie deux valeurs de t répondant à une même valeur de t'; le nombre des coïncidences de deux valeurs de t' est de même

$$n \times 2(m'-1);$$

lorsque simultanément, pour une solution (t, t'), t' donne deux t coïncidents et inversement, auquel cas nous dirons qu'il y a *coïncidence simultanée*, la courbe F a un point double correspondant.

2. *Pour qu'une correspondance* (n, m') *se décompose en deux correspondances* (α, α') *et* (β, β'), *avec*

$$\alpha + \beta = n, \quad \alpha' + \beta' = m',$$

il faut des conditions en nombre

(1) $$c = \alpha\beta' + \beta\alpha';$$

le nombre des paramètres dont dépend la correspondance (n, m') la plus générale est en effet

$$(n+1)(m'+1) - 1 \quad \text{ou} \quad nm' + n + m',$$

et il suit de là que le nombre des conditions pour la décomposition est

$$(nm' + n + m') - (\alpha\alpha' + \alpha + \alpha') - (\beta\beta' + \beta + \beta')$$

ou

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') - \alpha\alpha' - \beta\beta'$$

ou

$$\alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

Quelles sont ces conditions?

Le fait de coïncidences SIMULTANÉES *signalé au n° 1 doit se produire un nombre de fois égal à* $\alpha\beta' + \beta\alpha'$ *ou c.*

En effet, cela revient à dire que la courbe F doit avoir à distance finie ce nombre de points doubles; or, les deux courbes qui doivent la composer auront à distance finie des points d'intersection dont le nombre est

$$(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - \alpha\beta - \alpha'\beta' \quad \text{ou} \quad \alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

En ce qui concerne les coïncidences pour la variable t, par exemple, il y a naturellement $\alpha' \times 2(\alpha - 1)$ coïncidences où les deux valeurs de t qui coïncident appartiennent à la correspondance (α, α'), il y en a $\beta' \times 2(\beta - 1)$ où les deux valeurs de t qui coïncident appartiennent à la correspondance (β, β'), et les coïncidences restantes (qui doivent être comptées deux fois) sont celles où *l'une des deux valeurs coïncidentes de* t *appartient à la correspondance* (α, α'), *tandis que l'autre appartient à la correspondance* (β, β'); on peut suivre ces faits sur la courbe F décomposée; on a l'égalité

$$\alpha' \times 2(\alpha - 1) + \beta' \times 2(\beta - 1) + 2(\alpha\beta' + \beta\alpha') = m' \times 2(n - 1).$$

Pour $\alpha = 1$, le nombre $\alpha' \times 2(\alpha - 1)$ est nul, une correspondance $(1, \alpha')$ ne pouvant donner lieu à une coïncidence de deux valeurs de t; pour $\beta = 1$, on a un fait analogue. Nous reviendrons plus loin sur le cas $n = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

On obtient directement comme il suit le nombre $\alpha\beta' + \beta\alpha'$, qui s'est présenté ci-dessus comme le résultat d'un calcul. A une valeur t_1 de t répondent, dans la correspondance (α, α'), α' valeur de t', dont chacune fournit, dans la correspondance (β, β'), β valeurs t_2 de t; une valeur de t_1 donne ainsi $\alpha'\beta$ valeurs de t_2, et

inversement une valeur de t_2 donne $\beta'\alpha$ valeurs de t_1; la correspondance entre t_1 et t_2 est donc une correspondance $(\alpha'\beta, \beta'\alpha)$ admettant des coïncidences en nombre $\alpha\beta' + \beta\alpha'$, et ces coïncidences sont bien celles que l'on a en vue.

Mais l'existence de coïncidences simultanées en nombre $c = \alpha\beta' + \beta\alpha'$ ne suffit pas en général pour assurer la décomposition, bien que c soit le nombre des conditions requises pour cette décomposition.

Voici un cas où la décomposition est assurée. Soit une courbe d'ordre $m = p + q$; elle se décompose *à coup sûr* si elle a des points doubles en nombre

$$\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + 1$$

ou

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(q-1)(q-2)}{2} + pq,$$

c'est-à-dire si le nombre de ses points doubles est égal au nombre maximum des points doubles de deux courbes de degré p et q ($p + q$ étant égal à m), augmenté du nombre de leurs points d'intersection ([1]). Dans le cas qui nous occupe, la courbe F a par hypothèse :

A l'infini sur l'axe des t', l'équivalent de points doubles en nombre

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} + \alpha\beta,$$

à l'infini sur l'axe des t, l'équivalent de points doubles

([1]) L'introduction des nombres p et q a pour but d'obtenir un calcul simple; elle n'est nullement essentielle, la somme $p + q$ fonctionnant seule.

en nombre

$$\frac{(\alpha'+\beta')(\alpha'+\beta'-1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2}+\frac{\beta'(\beta'-1)}{2}+\alpha'\beta',$$

à distance finie des points doubles en nombre

$$\alpha\beta'+\beta\alpha';$$

à cause de

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha\beta'+\beta\alpha'=(\alpha+\alpha')(\beta+\beta'),$$

la décomposition est assurée si

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+\frac{\alpha'(\alpha'-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\beta(\beta-1)}{2}+\frac{\beta'(\beta'-1)}{2}$$

sur les nombres maximum de points doubles de deux courbes d'ordre $\alpha+\alpha'$ et $\beta+\beta'$, c'est-à-dire si l'on a

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha'(\alpha'-1)=(\alpha+\alpha'-1)(\alpha+\alpha'-2), \quad \ldots$$

ou

$$(\alpha-1)(\alpha'-1)=0, \qquad (\beta-1)(\beta'-1)=0.$$

On peut avoir $\alpha=1$, $\beta'=1$, de sorte que *la décomposition*

$$(n, m')=(1, m'-1)+(n-1, 1)$$

est assurée par des coïncidences simultanées en nombre

$$1+(n-1)(m'-1).$$

On peut avoir $\alpha=1$, $\beta=1$, de sorte que *la décomposition*

$$(2, m')=(1, \alpha')+(1, \beta')$$

est assurée par des coïncidences simultanées en nombre m', mais α' et β', simplement astreints à avoir pour somme m', ne sont déterminés que dans les deux cas $m'=2$, $m'=3$.

Voici la remarque annoncée plus haut relativement à ce cas. Comme on a $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les seules coïncidences possibles, en ce qui concerne la variable t, sont ici des coïncidences où l'une des valeurs de t appartient à la correspondance $(1, \alpha')$, tandis que l'autre appartient à la correspondance $(1, \beta')$; la formule écrite plus haut se réduit alors à

$$2c = 2m' \quad \text{ou} \quad c = m'.$$

Ainsi, pour $\alpha = 1$, $\beta' = 1$, le résultat est bien net. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les c coïncidences simultanées assurent la décomposition, mais elles peuvent avoir lieu de diverses façons auxquelles correspondent des décompositions différentes. En général, les c coïncidences simultanées n'assurent la décomposition, et telle ou telle décomposition, que si elles ont lieu d'une certaine façon : le sens de cette expression est précisé par l'exemple suivant.

3. Pour le cas particulier où l'une des deux correspondances composantes doit être doublement linéaire, on a ce théorème :

Théorème. — *Pour qu'une correspondance (n, m') entre deux variables t et t' se décompose en deux correspondances dont l'une soit une correspondance doublement linéaire*

$$(n, m') = (1, 1) + (n-1)(m'-1),$$

il doit exister, en nombre

$$c_1 = n + m' - 2, \tag{2}$$

des coïncidences simultanées de deux valeurs de t et de deux valeurs de t'. Si n ou m' a la valeur 2, cela

suffit. Si l'on a

$$n \gtreqless 3, \quad m' \gtreqless 3,$$

les $n + m' - 2$ couples de valeurs doubles de t et t' doivent satisfaire à une même relation homographique, ou encore le rapport anharmonique de quatre quelconques des valeurs doubles de t doit être égal à celui des quatre valeurs doubles correspondantes de t'; cela n'augmente d'ailleurs pas le nombre des conditions si l'on appelle CONDITION NOUVELLE *une égalité nouvelle qui doit avoir lieu, et non une égalité qui se trouve résulter d'égalités précédentes en vertu d'un choix fait entre divers cas possibles.*

Pour $n = 2$ ou $m' = 2$, le théorème résulte de ce qu'on a vu plus haut. Pour $n \gtreqless 3$, $m' \gtreqless 3$, les conditions indiquées sont certainement nécessaires, puisque les $n + m' - 2$ points doubles accidentels de la courbe F doivent appartenir à une courbe $F_{11} = 0$. Elles sont suffisantes; supposons en effet que la courbe F ait à distance finie $n + m' - 2$ (au moins 4) points doubles appartenant à une courbe $F_{11} = 0$; si celle-ci ne faisait pas partie de la courbe F, elle la couperait à distance finie en des points au nombre de $2(n + m' - 2)$; or elle ne peut la couper qu'en $n + m'$ points, nombre inférieur au précédent, puisque la différence

$$2(n + m' - 2) - (n + m') \quad \text{ou} \quad n + m' - 4$$

est au moins égale à 2. Le théorème est donc démontré. [On peut observer que, pour $n + m' = 5$, la courbe F_{11} qui passe par les trois points doubles est encore déterminée. Pour $n + m' = 4$, il n'y a plus que deux points doubles à distance finie; la quartique $F_{22} = 0$ se décompose en deux hyperboles $F_{11} = 0$, $F'_{11} = 0$, qui se coupent à distance finie aux deux points doubles.]

II.

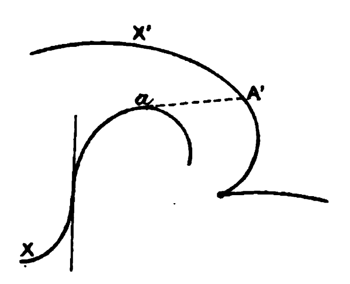
4. Lorsqu'une courbe est représentée paramétriquement, comme il arrivera dans ce qui suit, une valeur du paramètre ne détermine pas seulement un point si l'on se sert de coordonnées ponctuelles, une tangente si l'on se sert de coordonnées tangentielles, mais bien l'ensemble d'un point de la courbe et de la tangente en ce point, ensemble que l'on peut appeler un *élément* de la courbe. Si la courbe est donnée par les coordonnées de ses points, fonctions d'un paramètre, un point nodal donne lieu à deux valeurs du paramètre attachées aux deux éléments correspondants; mais un point de rebroussement donne lieu à une valeur unique du paramètre, et *une droite passant par un point de rebroussement se présente alors comme une tangente parasite de la courbe;* si l'on complète la courbe par des points (classe 1) placés aux points de rebroussement, la classe de la courbe complétée est

$$N = n + \varkappa = 2(m + p - 1),$$

p étant le genre de la courbe, et la simplicité de l'expression $2(m + p - 1)$ est un fait digne de remarque. Si la courbe est donnée par les coordonnées de ses tangentes, fonctions d'un paramètre, une bitangente donne lieu à deux valeurs du paramètre attachées aux deux éléments correspondants; mais une tangente d'inflexion donne lieu à une valeur unique du paramètre, et *un point situé sur une tangente d'inflexion se présente alors comme un point parasite de la courbe;* si l'on complète la courbe par des droites (ordre 1) placées sur les tangentes d'inflexion, l'ordre de la courbe complétée est

$$M = m + \iota = 2(n + p - 1).$$

5. Soient deux courbes *unicursales*, l'une X dont on considérera les tangentes a et qui sera de classe n, l'autre X' dont on considérera les points A' et qui sera d'ordre m'. Pour la première, les coordonnées u, v, w d'une tangente a sont égales à des polynomes entiers en t de degré n; pour la seconde, les coordonnées x', y', z' d'un point A' sont égales à des polynomes entiers en t' de degré m'. La courbe X sera complétée au point de vue ponctuel (droites, ordre 1, sur les tangentes d'inflexion), la courbe X' sera complétée au point de



vue tangentiel (points, classe 1, aux points de rebroussement); l'ordre de X complétée, la classe de X' complétée sont respectivement

$$M = m + \iota = 2(n-1), \qquad N' = n' + \varkappa' = 2(m'-1).$$

Nous ferons correspondre les éléments (a, A) *de la courbe* X *et les éléments* (A', a') *de la courbe* X' *par la condition que la tangente* a *passe au point* A' : cette *correspondance tangentielle* est une correspondance (n, m'), exprimée par la relation

$$ux' + vy' + wz' = 0 \qquad \text{ou} \qquad F(t, t') = 0.$$

Les points A' de la courbe X' qui donnent lieu à une coïncidence de deux éléments (a, A) sur la courbe X sont les points communs à X' et à X com-

plétée (si A′ est un point d'intersection de X′ avec une tangente d'inflexion de X, et si A'_1 est un point de X′ infiniment voisin de A′, deux des tangentes menées de A'_1 à X sont infiniment voisines et ont leurs points de contact infiniment voisins); le nombre de ces points est

$$m' \times M \quad \text{ou} \quad m' \times 2(n-1),$$

et ce résultat est conforme à ce qu'on a vu au n° 1. De même, les tangentes a à la courbe X qui donnent lieu à une coïncidence de deux éléments (A', a') sur la courbe X′ sont les tangentes communes à X et à X′ complétée; leur nombre est

$$n \times N' \quad \text{ou} \quad n \times 2(m'-1).$$

Un contact des deux courbes complétées donne deux coïncidences simultanées, c'est-à-dire donne simultanément deux éléments (a, A) coïncidents si l'on part de A′, deux éléments (A', a') coïncidents si l'on part de a; on dira que le contact est *singulier* si une tangente d'inflexion de X touche X′, si un point de rebroussement de X′ est sur X, si une tangente d'inflexion de X passe par un point de rebroussement de X′.

6. *Pour que la correspondance tangentielle* (n, m') *se décompose en deux correspondances* (α, α') *et* (β, β'), *il faut, d'après ce qu'on a vu, que les deux courbes complétées aient des contacts en nombre*

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha';$$

mais cela ne suffit pas, bien que ce nombre soit celui des conditions requises pour la décomposition; les contacts doivent avoir lieu d'une certaine façon, si l'on peut ainsi parler, et les exemples que l'on trouvera plus loin éclaireront ce point délicat.

Si A' est un point d'intersection des deux courbes complétées, les deux éléments (a, A) qui coïncident appartiennent tous deux à la correspondance (α, α') ou tous deux à la correspondance (β, β'); le nombre de ces points est

$$\alpha' \times 2(\alpha - 1) + \beta' \times 2(\beta - 1).$$

De même, si a est une tangente commune aux deux courbes complétées, etc. Pour chacun des contacts en nombre

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha',$$

A' étant le point de tangence, l'une des deux tangentes a coïncidentes appartient à la correspondance (α, α'), tandis que l'autre appartient à la correspondance (β, β'), et, simultanément, a étant la tangente de contact, deux points A' coïncident dans des conditions analogues.

Pour $\alpha = 1$, un point A' d'intersection des deux courbes complétées donne deux tangentes a coïncidentes qui ne peuvent appartenir à la même correspondance (1, α'), mais seulement à la même correspondance (α', β'); pour $\beta = 1$, etc. Nous reviendrons sur le cas où, la courbe X étant une conique, on aurait

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1.$$

En ce qui concerne la nature des contacts capables d'assurer la décomposition, voici une remarque :

Pour $\alpha = 1$, si X a des tangentes d'inflexion, chacune d'elles doit toucher en α' points la courbe X' complétée, ces contacts singuliers étant au nombre de ceux qu'exige la décomposition; l'examen de la figure montre en effet qu'une tangente d'inflexion de X ne peut être traversée par X' en l'un des points A' qui correspondent à cette tangente dans la correspondance (1, α'),

puisque, en faisant mouvoir la tangente a dans le voisinage de la tangente d'inflexion, on aurait deux tangentes a pour un même point A'; cette tangente d'inflexion doit toucher en A' la courbe X', le point A' pouvant être toutefois un point de rebroussement de X'. Pour $\alpha' = 1$, un point de rebroussement de X' doit être de même un point multiple d'ordre α de X complétée. Il y a là des contacts singuliers qui sont du nombre de ceux qu'exige la décomposition.

7. Si la courbe X est une conique, la courbe X' étant toujours d'ordre m', la décomposition de la correspondance tangentielle $(2, m')$ peut seulement donner deux correspondances $(1, \alpha')$ et $(1, \beta')$. *La conique X doit alors avoir avec la courbe X' des contacts en nombre m', qui assurent, comme on l'a vu, la décomposition;* mais α' n'est pas déterminé, sauf pour $m' = 2$ ou $m' = 3$, et l'on verra plus loin ce qui se passe pour $m' = 4$.

Comme on a ici $\alpha = 1$, $\beta = 1$, les deux courbes sont nécessairement tangentes en tous les points qui leur sont communs, l'une des deux valeurs de t qui coïncident appartenant à la correspondance $(1, \alpha')$, tandis que l'autre appartient à la correspondance $(1, \beta')$.

On aurait un fait corrélatif avec une conique X', les $2n$ tangentes communes à la courbe X et à cette conique étant confondues deux à deux par le fait que les deux courbes ont des contacts en nombre n.

8. Si l'une des correspondances doit être uniforme, on a ce théorème :

Théorème. — *Pour que la correspondance tangentielle entre les deux courbes unicursales X et X', la*

première de classe n, la seconde d'ordre m', se décompose en deux correspondances dont l'une soit une correspondance uniforme, il faut et il suffit que les deux courbes complétées aient des contacts en nombre

$$n + m' - 2,$$

les rapports anharmoniques des éléments de contact pris quatre à quatre (c'est-à-dire les rapports anharmoniques des t de ces éléments) étant les mêmes sur les deux courbes; cela forme d'ailleurs seulement $n + m' - 2$ *conditions distinctes.*

Les tangentes d'inflexion de X doivent toucher X', les points de rebroussement de X' doivent être sur X, une tangente d'inflexion de X pouvant toutefois passer par un point de rebroussement de X'.

On pourrait énoncer des conditions moins surabondantes; l'énoncé, tel qu'il est, veut dire ceci : parmi les façons d'être de deux courbes unicursales X et X' qui ont $n + m' - 2$ contacts, il en peut exister une pour laquelle les rapports anharmoniques indiqués soient égaux, et, alors, la décomposition demandée a lieu.

III.

9. L'exemple le plus simple est celui de deux coniques bitangentes qui est bien connu.

La décomposition de la correspondance tangentielle (2, 2) en deux correspondances homographiques intervient dans la construction de la droite qui est la transformée d'un point dans une corrélation générale déterminée par ses deux coniques doubles (coniques bitangentes). Elle donne lieu à ce théorème :

Étant données deux coniques bitangentes, il existe

une infinité de quadrilatères ABCD, *tels que* AB *est tangent en* A *à la première conique*, BC *est tangent en* B *à la seconde conique*, ..., *les deux couples* AB *et* CD *n'appartenant pas à la même homographie*, ...

10. Pour une conique X et une cubique nodale X′, trois contacts assurent la décomposition

$$(2, 3) = (1, 1) + (1, 2);$$

le fait corrélatif est donné par une conique X′ et une courbe X de troisième classe ayant une tangente double (quartique tricuspidale, hypocycloïde à trois rebroussements, cardioïde). Ce qui concerne les contacts singuliers, pour $\alpha' = 1$ ou $\alpha = 1$, est mis en relief par le fait suivant : soit une courbe de troisième ordre et de troisième classe, ayant par suite un point de rebroussement et une tangente d'inflexion; si on la prend comme courbe X′, la conique X doit passer par le point de rebroussement (à cause de $\alpha' = 1$) et être doublement tangente à la courbe; si on la prend comme courbe X, la conique X′ doit toucher la tangente d'inflexion (à cause de $\alpha = 1$) et être doublement tangente à la courbe.

11. Soit une quartique trinodale X′ et une conique X quadruplement tangente à cette courbe : la décomposition de la correspondance tangentielle est assurée, mais on peut avoir

$$(2, 4) = (1, 2) + (1, 2),$$

ou

$$(2, 4) = (1, 1) + (1, 3);$$

il s'agit de distinguer ces deux cas.

(*a*). Pour éclairer ce qu'il y a à dire ici, nous ferons

une courte incursion dans le domaine des quartiques de genre *un*. Étant donnée une quartique *binodale* X', dont les points doubles sont les sommets A et C du triangle de référence, l'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

$$(ky^2 + Pyz + Q\,zx + Rxy)^2 - y^2 X = 0,$$

le polynome X étant du second degré, de sorte qu'elle est l'enveloppe des coniques

$$\lambda^2 y^2 + 2\lambda(ky^2 + \ldots) + X = 0;$$

X est l'une quelconque de ces coniques, comme on le voit en changeant k en $k + \lambda$. La conique X est ainsi quadruplement tangente à la quartique X', et le système de coniques quadruplement tangentes dont elle fait partie ([1]) est celui qui contient la droite double AC, obtenue pour λ infini; les quatre points de contact d'une telle conique avec la quartique sont sur une conique passant aux points doubles, et dont les tangentes en ces points sont conjuguées de AC par rapport aux deux tangentes de la courbe. Dans ces conditions très précises, la correspondance tangentielle entre la conique X et la quartique X' se décompose en deux correspondances (1, 2).

En effet, considérons la conique X qui est l'enveloppe de la droite

$$xt^2 + 2yt + z = 0,$$

et dont l'équation est

$$y^2 - xz = 0$$

([1]) Il y en a douze autres, formant trois familles. Cf. *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVII : *Sur les dégénérescences des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique.*

ou

$$xt+y)^2-x(xt^2+2yt+z)=0;$$

l'équation

$$(y^2-xz)f_1^2-f_2^2=0$$

ou

$$[(xt+y)^2-x(xt^2+2yt+z)]f_1^2-f_2^2=0$$

représente une quartique binodale X′, les points doubles étant à la rencontre de la droite $f_1=0$ avec la conique $f_2=0$, et cette quartique est quadruplement tangente à la conique de la manière indiquée, les points de contact et les points doubles étant sur la conique $f_2=0$; elle est d'ailleurs la plus générale de son espèce, car elle doit dépendre de 8 paramètres $(14-2-4)$, et c'est bien ce qui a lieu. En coupant cette courbe par la tangente variable $xt^2+\ldots=0$, on a 4 points qui se séparent en deux groupes de 2 points, attendu que l'on a, avec $\varepsilon=\pm 1$,

$$(xt+y)f_1+\varepsilon f_2=0;$$

on a aussi bien

$$(yt+z)f_1-\varepsilon t f_2=0;$$

le fait annoncé est établi.

On peut remarquer que chacune des correspondances (1, 2) ainsi obtenues entre les deux courbes X et X′ fait partie d'une correspondance dans le plan; car, si l'on élimine y entre les deux équations ci-dessus, on a

$$t^2 x f_1+2\varepsilon t f_2-z f_1=0;$$

les coordonnées u, v, w de la tangente à la conique étant t^2, $2t$, 1, on peut écrire

$$u.xf_1+\varepsilon v.f_2-w.f_1=0;$$

on a d'ailleurs

$$ux+vy+wz=0;$$

ces deux équations, dont aucune ne renferme t, établissant une correspondance dans le plan entre la droite (u, v, w) et le point (x, y, z).

Je renverrai, pour une autre démonstration, au Mémoire dont il a été parlé au début; cette démonstration fait bien ressortir le rôle des contacts des deux courbes.

Si A est un point de rebroussement de la quartique, c'est que, dans l'équation

$$(ky^2 + \ldots)^2 - y^2 X = 0,$$

le polynome X ne renferme pas de terme en x^2 : la conique X passe alors en A, et est triplement tangente à la quartique; si A et C sont des points de rebroussement, la conique X passe en A et C, et est doublement tangente à la quartique : par exemple, si la quartique est une cartésienne, la conique X est un cercle doublement tangent à cette courbe, et ayant un centre sur l'axe.

Soit alors une quartique trinodale X' dont les points doubles sont A, B, C. Un premier système α de coniques quadruplement tangentes à la quartique comprend une conique formée de la droite double BC; si B ou C est cuspidal, ces coniques passent en B ou C (bien qu'on n'ait pas $\alpha' = 1$), mais il n'en est pas de même pour le point A. On a deux systèmes analogues β et γ. Si la conique X fait partie de l'un de ces systèmes, la correspondance tangentielle se décompose en deux correspondances (1, 2). *La quartique peut être par exemple un limaçon de Pascal, pour lequel les points cycliques sont des points de rebroussement; les coniques* X *pourront être les cercles bitangents qui ont leurs centres sur l'axe.*

(*b*). *Une quartique trinodale* X' *admet un quatrième*

système de coniques X quadruplement tangentes, pour lequel le rapport anharmonique des quatre points de contact est le même sur X et sur X′, de sorte que la correspondance tangentielle (2, 4) se décompose en deux correspondances (1, 1) et (1, 3). L'équation de X′, rapportée au triangle des points doubles, est en effet

$$\frac{a}{x^2}+\ldots+\frac{2f}{yz}+\ldots=0,$$

et la transformation unidéterminative

$$\frac{ux}{\lambda}=\frac{vy}{\mu}=\frac{wz}{\nu} \qquad (\lambda+\mu+\nu=0)$$

donne une conique X; le point (x, y, z) de la quartique, et la tangente correspondante (u, v, w) à la conique, vérifient la condition

$$ux+vy+wz=0,$$

de sorte qu'il y a bien correspondance tangentielle uniforme; si l'on pose $A=bc-f^2, \ldots, F=gh-af, \ldots$, l'équation ponctuelle de la conique est

$$A\lambda^2.x^2+\ldots+2F\mu\nu.yz+\ldots=0,$$

et l'enveloppe de cette courbe, quand λ, μ, ν varient sous la condition $\lambda+\mu+\nu=0$, est la quartique X′. Si la quartique a $\varkappa'$ points de rebroussement, comme on a $\alpha'=1$, les coniques X passent par ces points et ont avec la quartique des contacts véritables en nombre $4-\varkappa'$; *avec un limaçon de Pascal, ces coniques sont les cercles bitangents qui ont leurs centres sur le cercle dont le limaçon est une conchoïde,* et ils sont liés au pôle d'anallagmasie situé sur l'axe; pour une cardioïde, ces cercles passent par le point de rebroussement réel (ce sont alors en même temps les cercles qui ont pour

diamètres les cordes menées par le point de rebroussement dans le cercle dont la cardioïde est une podaire.

Voici une remarque : si, de deux points M et N d'un limaçon de Pascal, on mène à un cercle bitangent, du système de ceux qui n'ont pas leurs centres sur l'axe, deux tangentes *m* et *n* convenablement choisies, et dont aucune n'est arbitraire, leur angle est constant, quel que soit ce cercle; en effet, le rapport anharmonique des points M, N, I, J sur le limaçon est égal au rapport anharmonique des tangentes *m*, *n*, *i*, *j* au cercle; il en résulte ce fait connu qu'un limaçon de Pascal est lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à deux cercles doublement tangents à cette courbe, sans avoir leurs centres sur l'axe; l'un des cercles peut se réduire à un point, qui est le point double de la courbe, de sorte que le limaçon est la podaire oblique de son point double par rapport à un cercle bitangent de l'espèce indiquée : cette dernière propriété entraine la précédente, et, d'ailleurs, elle rend compte de la correspondance tangentielle uniforme entre le limaçon et le cercle bitangent.

On aurait des faits corrélatifs. On considérerait d'abord une conique X′ et une courbe de quatrième classe ayant deux tangentes doubles, etc.

Si l'on considère une courbe pour laquelle on a

$$m = 4, \qquad \delta = 1, \qquad \varkappa = 2,$$

et, par suite,

$$n = 4, \qquad \tau = 1, \qquad \iota = 2,$$

par exemple un limaçon de Pascal, on pourra la prendre comme courbe X′ ou comme courbe X, et l'on aura des remarques analogues à celles faites à la fin du n° 10 : si on la prend comme courbe X, l'une des correspon-

dances tangentielles sera une correspondance (1, 1) si la conique X′ touche les deux tangentes d'inflexion et est bitangente à la courbe.

12. Le cas $n = 3$, $m' = 3$ fera bien comprendre comment les contacts en nombre c (et en général les c coïncidences simultanées pour t et t') doivent avoir lieu *d'une certaine façon* pour qu'il y ait décomposition de la correspondance. Il faudra quatre contacts ; comme une courbe unicursale de troisième ordre ou de troisième classe dépend de huit paramètres, on peut la déterminer par quatre points et leurs tangentes ; on a alors ce théorème :

Théorème. — *Il existe quatre courbes unicursales du troisième ordre touchant quatre droites données en quatre points donnés, et quatre unicursales de troisième classe touchant les mêmes droites aux mêmes points :* ces courbes se correspondent une à une, *le rapport anharmonique des quatre points de contact étant le même sur les deux courbes, et, si l'on prend deux courbes qui se correspondent, la correspondance tangentielle se décompose en deux correspondances dont l'une est une correspondance* (1, 1).

En effet, les quatre points étant désignés par les indices 1, 2, 3, 4, on a d'abord pour toute unicursale du troisième ordre passant par ces points

$$x = \sum \frac{A_1}{t-\alpha} x_1, \qquad y = \sum \frac{A_1}{t-\alpha} y_1, \qquad z = \ldots;$$

pour $t = \alpha$ on a le point d'indice 1, etc. Les quatre paramètres restants sont $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$, et la valeur du rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Soit $u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$ la droite, passant au

point d'indice 1, à laquelle la courbe doit être tangente en ce point. Cette droite rencontre la courbe ci-dessus en trois points dont les t sont donnés par l'équation

$$u_1\left(\frac{A_1}{t-\alpha}x_1+\frac{A_2}{t-\beta}x_2+\ldots\right)+v_1\left(\frac{A_1}{t-\alpha}y_1+\ldots\right)+\ldots=0;$$

l'un de ces points est le point d'indice 1, les deux autres correspondent aux deux valeurs de t données par l'équation

$$u_1\left(\frac{A_2}{t-\beta}x_2+\frac{A_3}{t-\gamma}x_3+\ldots\right)+\ldots+\ldots=0,$$

et la droite est tangente si l'une de ces deux valeurs de t est égale à α, c'est-à-dire si l'on a

$$A_2\frac{u_1x_2+v_1y_2+w_1z_2}{\alpha-\beta}+A_3\frac{u_1x_3+\ldots}{\alpha-\gamma}+\ldots=0,$$

ou, avec une notation abrégée,

$$A_2\frac{(1,2)}{\alpha-\beta}+A_3\frac{(1,3)}{\alpha-\gamma}+A_4\frac{(1,4)}{\alpha-\delta}=0.$$

Cette relation et les trois relations analogues déterminent les rapports $A_1:A_2:A_3:A_4$, et la valeur du rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$. L'élimination des A donne

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1,2}{\alpha-\beta} & \frac{1,3}{\alpha-\gamma} & \frac{1,4}{\alpha-\delta} \\ \frac{2,1}{\beta-\alpha} & 0 & \frac{2,3}{\beta-\gamma} & \frac{2,4}{\beta-\delta} \\ \frac{3,1}{\gamma-\alpha} & \frac{3,2}{\gamma-\beta} & 0 & \frac{3,4}{\gamma-\delta} \\ \frac{4,1}{\delta-\alpha} & \frac{4,2}{\delta-\beta} & \frac{4,3}{\delta-\gamma} & 0 \end{vmatrix}=0;$$

en divisant les trois premières lignes respectivement par $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$, $\alpha-\beta$, et les trois premières colonnes

par les mêmes quantités, en désignant par P le produit de ces quantités, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1,2}{P} & \dfrac{1,3}{-P} & \dfrac{1,4}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)} \\ \dfrac{2,1}{-P} & 0 & \dfrac{2,3}{P} & \dfrac{2,4}{(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)} \\ \dfrac{3,1}{P} & \dfrac{3,2}{-P} & 0 & \dfrac{3,4}{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)} \\ -\dfrac{4,1}{(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)} & \dfrac{4,2}{(\delta-\beta)(\gamma-\alpha)} & \dfrac{4,3}{(\delta-\gamma)(\alpha-\beta)} & 0 \end{vmatrix} =$$

le signe — s'introduisant là où il y avait $\gamma-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\alpha$ au lieu de $\beta-\gamma$, ... On peut alors multiplier les trois premières lignes par P et supprimer le facteur P dans la dernière colonne, ce qui revient à remplacer P par 1 dans l'écriture ci-dessus; en posant

$$\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{1} = \frac{(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)}{-k} = \frac{(\gamma-\delta)(\alpha-\beta)}{k-1},$$

c'est-à-dire en désignant par k le rapport anharmonique $(\alpha\beta\gamma\delta)$, on a l'équation du quatrième degré en k

$$\begin{vmatrix} 0 & (1,2) & -(1,3) & (1,4) \\ -(2,1) & 0 & (2,3) & \dfrac{(2,4)}{-k} \\ (3,1) & -(3,2) & 0 & \dfrac{(3,4)}{k-1} \\ -(4,1) & \dfrac{(4,2)}{k} & \dfrac{-(4,3)}{k-1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On aura la même équation dans le cas de l'unicursale de troisième classe, car il faudra échanger (i, j) et (j, i), ce qui revient à échanger les lignes et les colonnes en changeant les signes de tous les termes. D'après ce qu'on a vu au n° 8, le théorème est démontré.

[$M^1 5 e \delta$, $M^1 6 c$, $M^2 4$]

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS CERTAINES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. STUYVAERT.

Le théorème célèbre énoncé par Steiner et relatif aux conditions de fermeture de certains polygones inscrits dans une cubique plane ou dans une quartique binodale a été démontré bien des fois, soit par des considérations de Géométrie synthétique, soit par l'emploi des fonctions elliptiques. D'habitude on passe de la cubique à la quartique par une transformation birationnelle et l'on n'expose guère plus que la démonstration même du théorème.

Nous nous proposons d'étudier, au moyen de l'Analyse algébrique, les quartiques binodales *quadrillées*, c'est-à-dire douées de quadrilatères de Steiner. On sait que, s'il existe un quadrilatère pareil, il en existe une infinité et nous montrerons que cette proposition est au fond identique à la suivante : une courbe rationnelle plane du second ordre ne peut dégénérer qu'en deux droites coïncidentes.

Ce sera le point de départ d'une série de propriétés des courbes ou systèmes quadrillés à deux, trois ou quatre nœuds.

Cette théorie peut être étendue aux deux courbes gauches du quatrième ordre. Enfin, dans certaines surfaces du quatrième ordre, on peut chercher les sections planes quadrillées.

COURBE PLANE RATIONNELLE DU SECOND ORDRE.

1. Les relations paramétriques

$$\rho x_i = a_i t^2 + 2 b_i t + c_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

définissent une conique dans le plan des x_1, x_2, x_3. Elles donnent, en employant une notation qui s'explique d'elle-même,

$$t^2 : 2t : 1 = (xbc) : (axc) : (abx),$$

d'où l'équation ponctuelle de la courbe

$$(axc)^2 = 4(xbc)(abx).$$

Les points d'intersection de la conique avec la droite $u_x = 0$ sont déterminés par l'équation

$$t^2 u_a + 2 t u_b + u_c = 0.$$

2. Pour que la courbe dégénère, il faut qu'une certaine droite u la rencontre en une infinité de points; alors l'équation précédente est indéterminée, tous ses coefficients sont nuls, donc les relations en u_i

$$u_a = 0, \qquad u_b = 0, \qquad u_c = 0$$

sont compatibles et l'on a

$$\Delta = (abc) = 0.$$

Or, lorsque ce déterminant est nul, sans que tous ses premiers mineurs s'évanouissent, il existe *une seule* relation linéaire entre les éléments de ses lignes, donc *une seule* droite u rencontrant la courbe en une infinité de points. Et si tous les premiers mineurs de Δ sont nuls, les quantités a_i, b_i, c_i sont proportionnelles, les équations paramétriques déterminent les rapports de x_1, x_2, x_3 et ne représentent plus qu'un seul point.

Donc, *quand la courbe rationnelle dégénère, ce ne peut être qu'en deux droites coïncidentes ou en un seul point.*

Dans le premier cas, chaque point de la droite trouvée répond à deux valeurs t' et t'' du paramètre t, et l'on a

$$\frac{a_1 t'^2 + 2b_1 t' + c_1}{a_1 t''^2 + 2b_1 t'' + c_1} = \frac{a_2 t'^2 + 2b_2 t' + c_2}{a_2 t''^2 + 2b_2 t'' + c_2} = \frac{a_3 t'^2 + 2b_3 t' + c_3}{a_3 t''^2 + 2b_3 t'' + c_3}.$$

L'égalité des deux premiers rapports donne, en effectuant les calculs et divisant par $t' - t''$, généralement non nul,

$$2tt'(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (t + t')(a_1 c_2 - a_2 c_1) + 2(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0,$$

ou, en appelant A_i, B_i, C_i les premiers mineurs de Δ,

$$2C_3 tt' - B_3(t + t') + 2A_3 = 0.$$

En égalant le troisième rapport à l'un des deux premiers, on obtient les équations

$$2C_2 tt' - B_2(t + t') + 2A_2 = 0,$$
$$2C_1 tt' - B_1(t + t') + 2A_1 = 0,$$

qui sont identiques à la précédente, puisque, par hypothèse, Δ est nul et que ses mineurs A_i, B_i, C_i sont proportionnels.

Quand les équations paramétriques représentent une droite, les couples de valeurs du paramètre qui donnent un même point de la droite sont en involution.

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS LA QUARTIQUE PLANE BINODALE.

3. Voici, précisé et complété, le cas particulier du théorème de Steiner, que nous nous proposons d'établir :

Une quartique plane binodale n'est pas, en général,

circonscrite à un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds; mais, lorsqu'il existe un quadrangle pareil, il y en a une infinité. Dans ce cas, le troisième point diagonal décrit une conique et les côtés du quadrangle qui ne passent pas par les nœuds enveloppent une courbe de quatrième classe.

Supposons les nœuds aux sommets $x_1 x_2$ et $x_1 x_3$ du triangle de référence. L'équation de la quartique est de la forme

$$\begin{aligned}\varphi = x_3^2(a_1 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2)\\ + 2x_3 x_1(a_2 x_2^2 + 2b_2 x_2 x_1 + c_2 x_1^2)\\ + x_1^2(a_3 x_2^2 + 2b_3 x_2 x_1 + c_3 x_1^2) = 0,\end{aligned}$$

ou, en posant $x_2 = \xi x_1$, $x_3 = \eta x_1$,

$$\begin{aligned}\varphi = \eta^2(a_1\xi^2 + 2b_1\xi + c_1)\\ + 2\eta(a_2\xi^2 + 2b_2\xi + c_2) + (a_3\xi^2 + 2b_3\xi + c_3) = 0.\end{aligned}$$

Pour qu'il existe un quadrangle inscrit dont deux points diagonaux soient aux nœuds, il faut que, pour deux valeurs, ξ_1 et ξ_2, de ξ, on ait les mêmes valeurs de η; il faut donc que les relations ci-après soient compatibles en ξ_1 et ξ_2 :

$$\frac{a_1\xi_1^2 + 2b_1\xi_1 + c_1}{a_1\xi_2^2 + 2b_1\xi_2 + c_1} = \frac{a_2\xi_1^2 + 2b_2\xi_1 + c_2}{a_2\xi_2^2 + 2b_2\xi_2 + c_2} + \frac{a_3\xi_1^2 + 2b_3\xi_1 + c_3}{a_3\xi_2^2 + 2b_3\xi_2 + c_3}.$$

Considérons, dans un autre plan, trois coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3, liées à un paramètre ξ par les égalités

$$\rho X_i = a_i\xi^2 + 2b_i\xi + c_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Elles définissent une courbe rationnelle du second ordre qui, d'après les conditions précédentes, doit avoir un point double, donc dégénérer. Cette circonstance se

réalise quand on a

$$\Delta \equiv (abc) = 0.$$

Alors la conique a une infinité de points doubles et les couples de valeurs de ξ qui donnent un même point double forment une involution, représentée par une des trois égalités suivantes, équivalentes entre elles,

$$2A_i - B_i(\xi_1 + \xi_2) + 2C_i\xi_1\xi_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Par suite, si la quartique binodale possède un quadrangle inscrit, on a $\Delta = 0$; elle possède donc une infinité de quadrangles inscrits dont les couples de côtés passant par le nœud $x_1 x_2$ sont en involution; et cette involution est représentée par une des égalités ci-dessus ou par

$$2A_i x_1' x_1'' - B_i(x_1' x_2'' + x_2' x_1'') + 2C_i x_2' x_2'' = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De même les couples de côtés passant par $x_1 x_3$ forment une involution représentée par une des équations suivantes, équivalentes entre elles :

$$2A_1 x_1' x_1'' - A_2(x_1' x_3'' + x_3' x_1'') + 2A_3 x_3' x_3'' = 0,$$
$$2B_1 x_1' x_1'' - B_2(x_1' x_3'' + x_3' x_1'') + 2B_3 x_3' x_3'' = 0,$$
$$2C_1 x_1' x_1'' - C_2(x_1' x_3'' + x_3' x_1'') + 2C_3 x_3' x_3'' = 0.$$

4. Avant de poursuivre la démonstration du théorème du numéro précédent, faisons quelques remarques.

Le déterminant Δ étant nul, il existe une relation linéaire entre les polynomes

$$a_i x_2^2 + 2b_i x_2 x_1 + c_i x_1^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

figurant dans l'équation $\varphi = 0$. L'évanouissement de ces polynomes représente donc trois couples de la première involution trouvée ci-dessus. De même on peut

ordonner φ par rapport à x_2 et l'on trouve que

$$a_1 x_3^2 + 2a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1^2 = 0,$$
$$b_1 x_3^2 + 2b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1^2 = 0,$$
$$c_1 x_3^2 + 2c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1^2 = 0$$

représentent trois couples de la seconde involution.

Pour la simplicité nous dirons que la courbe φ est *quadrillée* quand elle est circonscrite à des quadrangles ayant deux points diagonaux aux nœuds. La remarque précédente donne alors l'énoncé que voici :

Soient une quartique binodale φ, la première polaire d'un de ses nœuds et le couple de tangentes en ce nœud ; ces trois figures sont coupées par une droite quelconque, issue du second point double, en trois couples de points (autres que les nœuds). Si ces trois couples de points sont en involution, il en est de même des trois couples de points analogues obtenus en intervertissant les rôles des points doubles. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la courbe φ est quadrillée.

Voici encore un corollaire évident :

Si la courbe φ est quadrillée, toutes les droites issues d'un nœud la coupent en des couples de points qui sont projetés de l'autre nœud suivant des couples de rayons en involution. Réciproquement, si trois couples de rayons pareils, issus d'un même nœud, sont en involution, tous le sont, aussi bien pour l'un que pour l'autre nœud, et la courbe est quadrillée.

Un élément double d'une involution correspond à des tangentes issues de l'autre nœud et donne un quadrangle réduit à un segment de droite. Ainsi, *pour qu'une courbe φ soit quadrillée, il faut et il suffit que*

les contacts de deux tangentes issues de l'un des nœuds soient alignés sur l'autre.

Soit, pour fixer les idées,

$$a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2$$
$$\equiv \lambda(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) + \mu(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2)$$

la relation identique qui lie trois couples de l'involution en x_2, x_1. L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\varphi \equiv (a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2)(x_3^2 + \lambda x_1^2)$$
$$+ (a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2)(2x_3x_1 + \mu x_1^2)$$
$$\equiv \begin{vmatrix} a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2 & a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2 \\ -(2x_3x_1 + \mu x_1^2) & x_3^2 + \lambda x_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, l'évanouissement d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) \\ \varphi_1(x_1, x_3) & \varphi_2(x_1, x_3) \end{vmatrix}$$

où les f et les φ sont des formes quadratiques, représente une quartique binodale quadrillée. Car les quatre points communs aux deux couples de droites

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0$$

vérifient l'équation de la courbe et, quel que soit k, ce sont les sommets d'un quadrangle ayant deux points diagonaux aux nœuds. Donc, *pour qu'une quartique binodale soit quadrillée, il faut et il suffit que le premier membre de son équation puisse se mettre sous forme d'un déterminant de quatre fonctions quadratiques, où x_3 manque dans une ligne et x_2 dans l'autre.* Il en résulte aussi que *les deux involutions sont projectives.*

5. Passons à la recherche du lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits : nous venons de voir

que les couples de côtés opposés d'un quadrangle sont

$$f_1 + kf_2 = 0, \qquad \varphi_1 + k\varphi_2 = 0.$$

Un des côtés du triangle diagonal est $x_1 = 0$; les autres sont respectivement les droites polaires du nœud $x_1 x_3$ par rapport au couple de droites $f_1 + kf_2$ et du nœud $x_1 x_2$, par rapport au couple de droites $\varphi_1 + k\varphi_2$; les équations de ces polaires sont

$$\frac{df_1}{dx_2} + k\frac{df_2}{dx_2} = 0, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx_3} + k\frac{d\varphi_2}{dx_3} = 0,$$

et leur intersection (troisième point diagonal) décrit la conique

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_2} & \dfrac{df_2}{dx_2} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_3} & \dfrac{d\varphi_2}{dx_3} \end{vmatrix} \equiv \frac{d^2\varphi}{dx_2\,dx_3} = 0.$$

Le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits dans la quartique quadrillée φ *est la conique polaire de l'un des nœuds par rapport à la cubique polaire de l'autre.*

Cette conique a pour équation développée

$$a_1 x_3 x_2 + b_1 x_3 x_1 + a_2 x_2 x_1 + b_2 x_1^2 = 0.$$

Si l'on calcule son discriminant, on trouve

$$-a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad \text{ou} \quad -a_1 C_3.$$

La courbe dégénère si l'on a

$$a_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad C_3 = 0.$$

Dans le premier cas, la quartique φ se décompose en une droite x_1 et une cubique. Écartons provisoirement cette hypothèse. La propriété de la conique $\dfrac{d^2\varphi}{dx_2\,dx_3}$ de

se réduire à deux droites est indépendante du choix du triangle fondamental; mais l'équation $\varphi = 0$ ne conserve la même forme que si deux des sommets de ce triangle sont aux nœuds. La quantité C_3 est donc invariante pour les transformations de coordonnées qui déplacent le sommet $x_2 x_3$. Nous supposerons d'abord C_3 non nul; le cas de $C_3 = 0$ sera examiné plus tard.

6. Avant d'étudier l'enveloppe des côtés des quadrangles qui ne passent pas par les nœuds (dans l'hypothèse $C_3 \gtrless 0$), il convient d'examiner la correspondance entre les sommets opposés des quadrangles.

Les équations des involutions en x_2, x_1 et x_3, x_1 peuvent s'écrire, par exemple, sous la forme suivante, trouvée au n° 3 :

$$2A_3 x'_1 x''_1 - B_3(x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + 2C_3 x'_2 x''_2 = 0,$$
$$2C_1 x'_1 x''_1 - C_2(x'_1 x''_3 + x'_3 x''_1) + 2C_3 x'_3 x''_3 = 0.$$

De ces relations on peut tirer les coordonnées du sommet x' proportionnelles à des fonctions quadratiques des coordonnées du sommet opposé x'' ou inversement. Donc, *les sommets opposés des quadrangles se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique*.

Puisque C_3 n'est pas nul, les équations précédentes définiront une simple *inversion* si l'on déplace le sommet $x_2 x_3$ du triangle de référence de manière à annuler B_3 et C_2, ce qui revient à prendre pour côtés x_2 et x_3 du triangle de référence les rayons conjugués de x_1 dans les deux involutions.

Supposons que cette transformation ait été faite et que les deux involutions soient désormais représentées par

$$x'_2 x''_2 = c x'_1 x''_1, \qquad x'_3 x''_3 = a x'_1 x''_1.$$

Leurs rayons doubles ont pour équations

$$x_2 = \pm x_1 \sqrt{c}, \qquad x_3 = \pm x_1 \sqrt{a},$$

et l'on voit facilement que les couples de ces involutions se représentent par les équations suivantes où λ et μ sont des paramètres variables :

$$x_2^2 + c x_1^2 - \lambda x_2 x_1 = 0, \qquad x_3^2 + a x_1^2 - \mu x_3 x_1 = 0.$$

Ces deux involutions étant projectives, on a, par exemple,

$$\lambda\mu + 2n\lambda + 2m\mu + 4b = 0.$$

L'élimination de λ et μ donne l'équation de la courbe rapportée au triangle fondamental de l'inversion

$$\varphi \equiv (x_2^2 + c x_1^2)(x_3^2 + a x_1^2) + 2m(x_2^2 + c x_1^2) x_3 x_1 \\ + 2m(x_3^2 + a x_1^2) x_2 x_1 + 4b x_3 x_2 x_1^2 = 0$$

ou

$$\varphi \equiv x_3^2 (x_2^2 + 2m x_2 x_1 + c x_1^2) \\ + 2 x_3 x_1 (n x_2^2 + 2b x_2 x_1 + n c x_1^2) \\ + x_1^2 (a x_2^2 + 2ma x_2 x_1 + ac x_1^2) = 0.$$

Dans une quartique binodale quadrillée, les sommets opposés d'un quadrangle sont des points homologues d'une inversion trilinéaire dont les points fondamentaux sont les points diagonaux du quadrangle déterminé par les intersections des rayons doubles des deux involutions.

7. Pour obtenir l'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits nous allons résoudre d'abord ce problème d'algèbre : *eliminer λ entre les relations*

$$\frac{a_1 + b_1\lambda}{c_1 + d_1\lambda} = \frac{a_2 + b_2\lambda}{c_2 + d_2\lambda} = \frac{a_3 + b_3\lambda}{c_3 + d_3\lambda}.$$

Représentons chacun de ces rapports par $-\rho$, il

faut donc que les trois relations

$$a_i + b_i\lambda + c_i\rho + d_i\lambda\rho = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

soient compatibles en λ et ρ; multiplions-les par ρ : nous aurons six équations non homogènes en λ, ρ, $\lambda\rho$, ρ^2, $\lambda\rho^2$, et l'élimination de ces cinq quantités conduit à l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i & . & . \\ . & . & a_i & b_i & c_i & d_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour que les deux relations proposées en λ aient *deux* racines communes, il faut que les équations

$$a_i + b_i\lambda + c_i\rho + d_i\lambda\rho = 0$$

soient vérifiées par deux systèmes de valeurs de λ et ρ. En coordonnées cartésiennes λ, ρ, elles représentent trois hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques; pour qu'elles aient encore deux points communs, ils faut qu'elles fassent partie d'un même faisceau ou que l'on ait

$$\| \, a_i \quad b_i \quad c_i \quad d_i \, \| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ces problèmes préliminaires étant résolus, revenons à la courbe quadrillée φ rapportée aux trois points fondamentaux de l'inversion. Son équation est

$$x_3^2(x_2^2 + 2mx_2x_1 + cx_1^2) + 2x_3x_1(nx_2^2 + 2bx_2x_1 + ncx_1^2) \\ + x_1^2(ax_2^2 + 2max_2x_1 + acx_1^2) = 0,$$

et l'on a supposé que le mineur du déterminant Δ relatif au dernier élément, donc ici $b - mn$, n'était pas nul. L'équation peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_3^2 + ax_1^2 & -2x_3x_1 \\ nx_2^2 + 2bx_2x_1 + ncx_1^2 & x_2^2 + 2mx_2x_1 + cx_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle montre que les involutions projectives peuvent s'écrire

$$x_3^2 + a x_1^2 - 2\lambda x_3 x_1 = 0,$$

$$x_2^2(n + \lambda) + 2x_2 x_1(b + m\lambda) + c x_1^2(n + \lambda) = 0,$$

une même valeur de λ donnant des couples correspondants des involutions.

Une droite u donnée par l'équation

$$x_3 = -\frac{u_2 x_2 + u_1 x_1}{u_3}$$

coupe la première involution en des couples de points qui, projetés du nœud $x_1 x_2$, donnent cette troisième involution

$$u_2^2 x_2^2 + 2x_2 x_1(u_2 u_1 + \lambda u_2 u_3) + x_1^2(u_1^2 + a u_3^2 + 2\lambda u_1 u_3) = 0.$$

Pour que la droite u soit diagonale d'un quadrangle inscrit, il faut que la seconde et la troisième involution aient un couple commun, correspondant à une même valeur de λ, donc que l'on ait

$$\frac{u_2^2}{n + \lambda} = \frac{u_1 u_2 + \lambda u_2 u_3}{b + m\lambda} = \frac{u_1^2 + a u_3^2 + 2\lambda u_1 u_3}{c(n + \lambda)}.$$

L'élimination de λ, comme nous venons de l'effectuer, donne ce résultat

$$\begin{vmatrix} u_2^2 & 0 & n & 1 & . & . \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & b & m & . & . \\ u_1^2 + a u_3^2 & 2 u_1 u_3 & nc & c & . & . \\ \cdots\cdots & \cdots & u_2^2 & 0 & n & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots & u_1 u_2 & u_2 u_3 & b & m \\ \cdots\cdots & \cdots & u_1^2 + a u_3^2 & 2 u_1 u_3 & nc & c \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par le théorème de Laplace, et sup-

primant le facteur $(b - mn)u_2u_3$, il vient

$$u_1^4 - 2u_1^3(mu_2 + nu_3) + 4bu_1^2u_2u_3 + u_1(cu_2^2 - au_3^2)(mu_2 - nu_3) - (cu_2^2 - au_3^2)^2 = 0,$$

équation tangentielle d'une courbe de quatrième classe.

Pour que la droite u soit diagonale de deux quadrangles, il faut que les deux équations en λ écrites en dernier lieu aient deux racines communes; donc, d'après le problème préliminaire, il faut que l'on ait

$$\begin{Vmatrix} u_2^2 & 0 & n & 1 \\ u_1u_2 & u_2u_3 & b & m \\ u_1^2 + au_3^2 & 2u_1u_3 & nc & c \end{Vmatrix} = 0.$$

En omettant la seconde ou la première colonne on a respectivement

$$cu_2^2 - au_3^2 - u_1^2 = 0, \qquad 2u_1u_3(b - mn) = 0.$$

Par hypothèse, $b - mn$ n'est pas nul; on a supposé u_3 différent de zéro, puisque l'on a, ci-dessus, divisé par u_3, donc

$$u_1 = 0, \qquad cu_2^2 - au_3^2 = 0$$

représentent deux droites qui sont à la fois diagonales de deux quadrangles inscrits, et, par suite, tangentes doubles à l'enveloppe.

Pour une de ces droites, les seconde et troisième involutions considérées précédemment ont deux couples communs, par suite tous leurs couples communs, et aussi mêmes éléments doubles. Ceci explique pourquoi chacune des tangentes singulières,

$$u_1 = 0, \qquad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c},$$

est diagonale du quadrilatère formé par les rayons doubles de la première et de la seconde involution.

L'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits qui ne passent pas par les nœuds est une courbe de quatrième classe ayant pour tangentes doubles les diagonales du quadrilatère formé par les rayons doubles des involutions des côtés opposés des quadrangles inscrits.

Toutefois, bien que, pour l'une des tangentes singulières, la seconde et la troisième involution ont tous leurs couples communs, elles n'ont que deux couples communs correspondant à la même valeur de λ; ces valeurs de λ s'obtiennent en faisant

$$u_1 = 0, \qquad u_2 : u_3 = \pm\sqrt{a} : \sqrt{c}$$

dans l'une des relations

$$\frac{u_2^2}{n+\lambda} = \frac{u_1 u_2 + \lambda u_2 u_3}{b + m\lambda} = \frac{u_1^2 + a u_3^2 + 2\lambda u_1 u_3}{c(n+\lambda)},$$

par exemple dans la première : on obtient successivement

$$a(b+m\lambda) = \pm\sqrt{ac}(n+\lambda)\lambda,$$
$$\pm\lambda^2\sqrt{c} + \lambda(\pm n\sqrt{c} - m\sqrt{a}) - b\sqrt{a} = 0.$$

Les deux valeurs de λ coïncident, pour l'une ou l'autre des tangentes singulières, si l'on a

$$(\pm n\sqrt{c} - m\sqrt{a})^2 \pm 4b\sqrt{ac}$$
$$= am^2 + cn^2 \pm 2\sqrt{ac}(2b - mn) = 0.$$

Pour que les valeurs de λ coïncident pour les deux tangentes singulières, c'est-à-dire pour qu'elles soient toutes deux inflexionnelles, il faut que

$$am^2 + cn^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2b - mn = 0.$$

Quand une courbe de quatrième classe a deux tan-

gentes doubles, elle est en général du huitième ordre. Cet ordre s'abaisse d'une ou de deux unités quand une ou deux tangentes doubles deviennent inflexionnelles; comme on vient de le voir, cette circonstance peut se réaliser sans que l'on renonce à l'hypothèse $b \gtrless mn$.

L'enveloppe des côtés des quadrangles inscrits dans la quartique quadrillée est une courbe du huitième ordre qui peut s'abaisser au septième ou au sixième ordre.

8. Reprenons la première équation de la quartique quadrillée

$$\begin{aligned}\varphi \equiv x_3^2(a_1x_2^2 + 2b_1x_2x_1 + c_1x_1^2) \\ + 2x_3x_1(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) \\ + x_1^2(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0.\end{aligned}$$

Nous supposons encore $a_1 \gtrless 0$; mais, par contre, le mineur C_3 de $\Delta \equiv (abc)$ ou $a_1 b_2 - a_2 b_1$ est à présent nul.

Nous pouvons toujours, et d'une seule manière, déplacer le sommet $x_2 x_3$ du triangle de référence de telle sorte que les coefficients a_2 et b_1 s'annulent, car la transformation des coordonnées remplace ces coefficients a_2 et b_1 par des fonctions linéaires des paramètres de la transformation. Ayant donc

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_2 = b_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 \gtrless 0,$$

on doit avoir aussi

$$b_2 = 0,$$

et le déterminant Δ se réduit à

$$-b_1 b_3 c_2.$$

Par suite, pour que la courbe φ soit quadrillée, il faut que c_2 ou b_3 soit nul. L'équation se réduit à l'une des formes

$$x_3^2\,\chi(x_1, x_2) + x_1^2\,\psi(x_1, x_2) = 0,$$

$$x_2^2\,\chi_1(x_1, x_3) + x_1^2\,\psi_1(x_1, x_3) = 0.$$

Dans le premier de ces cas, chacune des droites $\chi(x_1, x_2) = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus au sommet $x_1 x_2$; et ce sommet est alors un point double d'inflexion; dans le second cas, c'est le second sommet qui présente cette singularité. Il suffit évidemment de considérer un de ces cas.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats que l'on obtient en appliquant les méthodes des numéros précédents.

Lorsque, dans une quartique binodale quadrillée, un des nœuds est un point double d'inflexion, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une droite, les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire, et leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe.

Remarquons que, *si l'une des branches de la courbe passant par un point double y présente une inflexion et si la courbe est quadrillée, la seconde branche a aussi une inflexion en ce point;* car les quatre tangentes issues du nœud considéré ont leurs contacts alignés deux à deux sur l'autre nœud; si donc un de ces contacts s'approche indéfiniment du premier nœud, il en est de même d'un autre de ces contacts.

(*A suivre.*)

[L¹17a]

SUR UN LIEU CONNU;

PAR UN ABONNÉ.

Par deux points fixes A *et* B *pris sur une conique donnée, on fait passer une circonférence variable, puis l'on mène à ces deux courbes deux tangentes communes, telles que les cordes de contact passent par le point de rencontre de* AB *avec la sécante commune associée* (¹); *trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes?* (CHASLES.)

Le cas particulier où les points A et B sont confondus a été proposé au Concours général en 1844 (*Nouv. Ann.*, 1844, p. 426, 431, 489).

Gérono, après avoir donné une solution géométrique (*Ibid.*, p. 495), a ramené géométriquement le cas général au cas particulier en montrant que le lieu reste le même si la corde AB se déplace parallèlement à elle-même (*Ibid.*, 1851, p. 408). Breton (de Champ) a résolu la question en considérant le point dont on cherche le lieu comme un centre d'homologie; il a remarqué que le problème peut s'étendre à l'espace, en remplaçant la conique et le couple de points par une

(¹) La restriction essentielle indiquée ici est souvent omise dans l'énoncé; si on ne la fait pas, le lieu se compose d'une conique et d'une courbe du quatrième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 122). Si la circonférence variable est remplacée par une conique variable passant par quatre points fixes *quelconques*, le lieu est une courbe du sixième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 184, Note de M. Darboux).

quadrique et une section circulaire (*Ibid.*, 1852, p. 62 et 375).

Plusieurs solutions analytiques ont été données (1863, p. 481; 1864, p. 49; 1873, p. 23; 1880, p. 91). Elles ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres, et celle qu'on va lire est empruntée au même fond d'idées que ses devancières.

Soit la conique S, dont l'équation est $f(x, y) = 0$, les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de la conique S; soit la conique T doublement tangente à la première, et qui sera formée par la suite des deux tangentes communes considérées dans l'énoncé

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0;$$

soit le cercle C, doublement tangent à la conique T,

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 + (px + qy + r)^2 = 0,$$

avec deux conditions dont nous n'écrirons pour le moment que la première,

$$(1) \qquad pq = \lambda\mu;$$

les cordes communes à la conique S et au cercle C qui passent au point de rencontre des cordes de contact avec T sont

$$(px + qy + r)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0,$$

et leurs coefficients angulaires seront m et $-m$ si l'on a

$$(2) \qquad (p + qm)^2 - (\lambda + \mu m)^2 = 0,$$

le terme du premier degré en m disparaissant *a priori* en vertu de (1).

Les relations (1) et (2) déterminent p et q; il suffit

de prendre

$$p + qm = \lambda + \mu m,$$
$$p \times qm = \lambda \times \mu m;$$

laissant de côté la solution illusoire $p = \lambda$, $q = \mu$, où m n'entre pas, on a la solution

$$p = \mu m, \qquad qm = \lambda.$$

Si l'on achève d'écrire que la conique C est un cercle en supposant

$$f(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + \ldots,$$

on a la condition

$$k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2) + (p^2 - q^2) = 0,$$

ou, d'après les expressions trouvées pour p et q,

$$(3) \qquad \frac{m^2}{m^2+1} k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2 m^2) = 0.$$

Si maintenant la conique T est formée des deux tangentes menées à la conique S par un point I de coordonnées α, β, on a

$$k = 4 f(\alpha, \beta), \qquad \lambda = f'_\alpha, \qquad \mu = f'_\beta,$$

et le lieu du point I est la conique représentée par l'équation

$$(4) \qquad \frac{4m^2(A - C)}{m^2+1} f(x, y) - (f'^2_x - m^2 f'^2_y) = 0;$$

cette conique passe aux quatre points de la conique S dont les tangentes ont pour coefficients angulaires m et $-m$.

Si l'on prend l'équation de la conique S sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation du lieu prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2 m^2 - b^2},$$

où l'on reconnaît une conique homofocale à la conique donnée.

Le lieu ne dépend que de la direction de la corde AB, et non de sa position.

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Bordeaux.

Épreuve écrite. — *Détermination de la latitude :*

1° *Par la distance zénithale d'une étoile connue observée dans un angle horaire également connu;*

2° *Par la distance zénithale méridienne d'une étoile connue. Conventions nécessaires pour que la formule soit générale;*

3° *Par la distance zénithale minimum d'un astre de déclinaison lentement variable, comme le Soleil;*

4° *Par la méthode de Summer ou des cercles de hauteur (exposé géométrique de la méthode).*

Épreuve pratique. — *Calculer pour des valeurs de t distantes de 4 jours et égales à 68 jours, 72 jours, ..., les racines de l'équation de Kepler*

$$u - e \sin u = nt.$$

On prendra

Excentricité .... $e = 0,2383279$
Moyen mouvement........ $n = 782'',6076$

Solution.

La première racine est voisine de 19°18'; la seconde racine est voisine de 20°26'. (Novembre 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Expression de la longueur d'un arc de méridien elliptique en fonction des latitudes extrêmes.*

II. *Mesure d'un arc de méridien et détermination de son amplitude.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calcul de l'azimut du lever d'une étoile et de la durée de la présence de cette étoile au-dessus de l'horizon, soit en négligeant la réfraction, soit en en tenant compte.*

Données numériques :

Déclinaison de l'étoile......	$\mathrm{D} = 38°41'46''$
Latitude du lieu...........	$\lambda = 45.11.23$
Réfraction à l'horizon......	$\theta = 33.47$

(Novembre 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Aberration.*

Aberration annuelle. Corrections :

1° *De l'ascension droite et de la déclinaison;*

2° *De la longitude et de la latitude.*

Description du déplacement apparent d'une étoile supposée fixe, résultant de l'aberration annuelle.

Aberration diurne :

Correction de l'ascension et de la déclinaison;

Cas particulier du passage au méridien.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a mesuré les ordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 de quatre points dont les abscisses sont x_1, x_2, x_3, x_4. Ces points étant supposés en ligne droite, trouver les valeurs les plus probables des coefficients α, β de l'équation*

$$Y = \alpha X + \beta$$

de cette droite.

Déterminer les erreurs à craindre sur α et β.

Application numérique :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 7,$$
$$x_2 = 44, \quad y_2 = 11,4,$$
$$x_3 = 91, \quad y_3 = 16,4,$$
$$x_4 = 137, \quad y_4 = 20,6.$$

(Juillet 1905.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Définition du temps sidéral, du temps vrai, du temps moyen. Rapport du jour solaire moyen au jour sidéral, sachant que la durée de l'année tropique moyenne est égale à* 366,242217 *jours sidéraux.*

II. *On considère un plan tangent à la sphère céleste, en un point* C *de distance polaire* p_0 *et d'ascension droite* α_0. *Du centre* O *de la sphère, on fait la perspective de cette sphère sur ce plan tangent. (C'est ce que réalise un cliché astrophotographique.)*

On suppose que les points du plan tangent soient déterminés par leurs coordonnées rectangulaires x, y, *l'*y *étant mesuré parallèlement à la tangente en* C *au cercle horaire de ce point, dirigée vers le Nord, et l'*x *suivant une direction perpendiculaire à celle-là dirigée vers l'Ouest.*

Démontrer que les formules qui permettent de passer des coordonnées célestes p *et* α *d'une étoile aux coordonnées* x, y *de son image sur le plan tangent sont*

$$x = \operatorname{tang}(p_0 - q), \qquad y = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0)\sin q}{\cos(p - q)}$$

avec

$$\operatorname{tang} p \cos(\alpha - \alpha_0) = \operatorname{tang} q$$

(q *étant un angle auxiliaire*).

On rappelle la formule suivante de la Trigonométrie sphérique qui pourra être utilisée

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le diamètre apparent* 2Δ *du Soleil, le* 15 *avril* 1885, *connaissant sa déclinaison*

$$\delta = +18^\circ 58' 9'',$$

le temps sidéral $2^m 14^s,42$ *qu'il met à franchir le méridien et la variation* $9^s,886$ *en temps moyen de l'ascension droite du Soleil pendant une heure moyenne.*

On utilisera pour le rapport du jour sidéral au jour moyen la valeur 0,997269. (Juillet 1905.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Lunette méridienne ; usage ; ses erreurs et leurs corrections. Détermination des constantes instrumentales figurant dans les formules de correction.*

Détermination des ascensions droites des étoiles :

1° *Par rapport à une étoile fixe prise arbitrairement pour origine ;*

2° *Par rapport au point vernal.*

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Le* 1er *juillet* 1905 *à* 0^h *temps moyen de Paris, les coordonnées écliptiques de la Lune sont*

$$L = 83°49'46'',4, \qquad \beta = -4°43'10''.$$

Le 8 *juillet à la même heure elles seront*

$$L' = 179°10'10'',5, \qquad \beta' = +2°25'56'',3.$$

Déduire de là la longitude θ *du nœud ascendant de l'orbite et l'inclinaison* i *de celle-ci.*

On fera et l'on utilisera cette remarque que le calcul de l'inclinaison contient tout naturellement un procédé de vérification quant au calcul de θ. (Juillet 1905.)

Marseille.

COMPOSITION ÉCRITE. — *Théorie de la réfraction astronomique.*

Loi relative au cas des faibles distances zénithales.

Formule de Laplace pour le cas où la distance zénithale n'excède pas 80°.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant l'ascension droite* α *d'un astre, sa déclinaison* δ *et l'inclinaison de l'écliptique* ε, *on demande de calculer :*

1° *La longitude* λ *et la latitude* β *de cet astre ;*

2° *Les changements* $\Delta\lambda$ *et* $\Delta\beta$ *qu'éprouvent la longitude et la latitude lorsque,* ε *restant invariable, l'ascension droite et la déclinaison sont augmentées respectivement de* $\Delta\alpha$ *et de* $\Delta\delta$.

Données numériques :

$$\alpha = 54°\ 8'\ 10'',0,$$
$$\delta = 25.16.20,0,$$
$$\varepsilon = 23.27.\ 0,0,$$
$$\Delta\delta = 10,0.$$

(Juillet 1905.)

SOLUTION.

Formules et calculs.

$$\operatorname{tang} N = \cot\delta \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha \sin(N+\varepsilon)}{\sin N},$$
$$\operatorname{tang}\beta = \cot(N+\varepsilon)\sin\lambda,$$

$\cos\lambda$ et $\cos\alpha$ ont le même signe.

$$\frac{\Delta N}{\sin 2N} = \frac{1}{2}\cot\alpha\,\Delta\alpha - \frac{\Delta\delta}{\sin 2\delta},$$
$$\frac{\Delta\lambda}{\sin 2\lambda} = \frac{\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin\varepsilon\,\Delta N}{2\sin N\sin(N+\varepsilon)},$$
$$\frac{\Delta\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\cot\lambda\,\Delta\lambda}{2} - \frac{\Delta N}{\sin 2(N+\varepsilon)}$$

ou mieux

$$\sin M = \frac{\sin\varepsilon\cos\lambda}{\cos\delta}$$

($\cos M$ a le même signe que $\cos\varepsilon - \sin\delta\sin\beta$).

$$\Delta\beta = \cos M\,\Delta\delta - \sin M\,\cos\delta\,\Delta\alpha,$$
$$\cos M\,\Delta\lambda = \sin M\,\Delta\delta + \cos M\cos\delta\,\Delta\alpha.$$

α..........	54° 8′ 10″,0	ε..........	23° 27′ 0″,0
δ..........	25.16.20,0	N..........	59.46.37,46
		N + ε.....	83.13.37,46

Résultats :	λ...	57° 49′ 41″,69	$\Delta\lambda$...	+ 11″,18
	β...	5.44.25,98	$\Delta\beta$...	+ 7,60

	Log.		Log.		Log.
$\cot\delta$...	0,3259616	$\operatorname{tang}\alpha$..........	0,1409102	$\cot(N+\varepsilon)$.	$\bar{1}$,0746833
$\sin\alpha$...	$\bar{1}$,9087054	$\sin(N+\varepsilon)$......	$\bar{1}$,9969586	$\sin\lambda$......	$\bar{1}$,9276042
$\operatorname{tang}\lambda$.	0,2346670	$\operatorname{tang}\alpha\sin(N+\varepsilon)$.	0,1378688	$\operatorname{tang}\beta$.....	$\bar{1}$,0022875
		$\sin N$...........	$\bar{1}$,9365507		
		$\operatorname{tang}\lambda$..........	0,2013181		

	Log.			Log.	
$\sin\varepsilon$........	$\bar{1}$,5998	»	$\frac{1}{10}\Delta\beta$.......	»	0,7601
$\cos\lambda$.......	$\bar{1}$,7263	»	$\frac{1}{10}\cos\beta\,\Delta\lambda$..	0,0466	1,1133
$\cos\delta\sin M$..	$\bar{1}$,3261	0,2119	$\cos\beta$.......	$\bar{1}$,9978	»
$\cos\delta$.......	$\bar{1}$,9563	»	$\frac{1}{10}\Delta\lambda$.......	0,0488	1,118
$\sin M$.......	$\bar{1}$,3698	0,2343			
$\cos M$......	$\bar{1}$,9877	0,9720			
$\cos\delta\cos M$..	$\bar{1}$,9440	0,8790			

QUESTIONS.

2019. Par l'un des axes d'une conique W on mène un plan v perpendiculaire au plan de cette conique; un segment de longueur constante l se déplace sous les conditions suivantes : l'une de ses extrémités décrit la conique W, il reste constamment normal à cette conique, et son autre extrémité est dans le plan v; démontrer que cette seconde extrémité décrit une conique V (à laquelle le segment est d'ailleurs constamment normal).

Avec l'autre axe de la conique W, et une autre longueur constante m, on aura une nouvelle conique U. Démontrer qu'un certain segment de longueur constante n peut se déplacer en ayant ses extrémités sur les coniques U et V, et en restant normal à ces deux coniques.

(G. Fontené.)

2020. On considère tous les triangles MPQ inscrits dans un cercle et tels que MP et MQ aient des directions données. Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle MPQ se compose de quatre cercles. (E.-N. Barisien.)

2021. Soit un triangle ABC, et soient M, N, P les milieux des côtés. Considérons les projections D, E, F d'un même point sur ces côtés. Si a, b, c sont respectivement les intersections des droites NP et EF, PM et FD, MN et DE, le triangle abc est conjugué par rapport au cercle DEF ([1]).

(G. Fontené.)

2022. Soient a, b, c trois coefficients consécutifs quelconques d'une équation algébrique à coefficients réels, dont toutes les racines sont réelles; on demande de démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$b^2(2b^2-3ac)^2 < a^3(4c^3-3ab^2).$$

(Solon Chassiotis.)

2023. C_m^p désignant le nombre des combinaisons de m objets p à p, démontrer l'inégalité

$$(C_m^{r+3}C_m^r - C_m^{r+1}C_m^{r+2})^2$$
$$< 4[(C_m^{r+1})^2 - C_m^r C_m^{r+3}][(C_m^{r+2})^2 - C_m^{r+1}C_m^{r+3}],$$

m et r étant quelconques ($r \leqq m$).

(Solon Chassiotis.)

2024. Soient C une cubique gauche, aa', bb', cc' trois cordes de cette courbe, génératrices d'une quadrique qui la contient tout entière.

Démontrer que les quatre plans (abc), $(ab'c')$, $(a'bc')$, $(a'b'c)$ passent par un même point d. De même les quatre plans $(a'b'c')$, $(a'bc)$, $(ab'c)$, (abc') passent par un même point d'. La droite dd' est une corde de la cubique C, et les points d et d' sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette corde. (R. Bricard.)

([1]) Si D, E, F sont les points de contact du cercle inscrit, le centre d'homologie des triangles abc, DEF est le point de contact de ce cercle avec le cercle des neuf points, l'axe d'homologie des triangles abc, ABC est la tangente en ce point (W.-R. Hamilton; cf. *Nouv. Ann.*, 1903, p. 183).

Le cas où D, E, F sont les pieds des hauteurs correspond à une question posée par M. Brocard (*Nouv. Ann.*, 1874, p. 208).

TABLE DES MATIÈRES.

Octobre 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHE, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

NOVEMBRE 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris :
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

[M¹5eδ, M¹6c, M²4]

QUADRILATÈRES DE STEINER DANS CERTAINES COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. STUYVAERT.

(*Suite et fin.*)

FIGURES DU QUATRIÈME DEGRÉ A TROIS ET QUATRE NOEUDS.

9. Tout le paragraphe précédent serait inexact si la condition $\Delta = 0$ équivalait à l'existence d'un troisième point double, car alors la propriété d'être quadrillée n'appartiendrait jamais à une quartique binodale. Mais il n'en est rien : admettons en effet que la courbe φ ait un troisième nœud au sommet $x_2 x_3$, ce qui revient à supposer

$$c_3 = c_2 = b_3 = 0.$$

Le déterminant Δ se réduit à $-a_3 b_2 c_1$ et n'est pas identiquement nul.

Réservons toujours les cas où l'on a, soit $a_3 = 0$, soit $c_1 = 0$, et où la courbe φ dégénère en une cubique et une droite x_2 ou x_3. Nous devons admettre $b_2 = 0$, et les tangentes

$$c_1 x_3^2 + 0 x_3 x_2 + a_3 x_2^2 = 0$$

au troisième nœud $x_2 x_3$ sont alors séparées harmoniquement par les deux autres points doubles. Ainsi, *pour qu'une quartique trinodale possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux des nœuds, il faut et il suffit que ceux-ci soient*

séparés harmoniquement par les tangentes au troisième nœud.

Comme on le vérifie sans peine, la correspondance des sommets opposés des quadrangles est donnée par les relations

$$\begin{aligned} x''_1 : x''_2 : x''_3 = a_2 b_1 (2a_2 x'_3 + a_3 x'_1)(2b_1 x'_2 + c_1 x'_1) \\ : -a_2 b_1 c_1 x'_2 (2a_2 x'_3 + a_3 x'_1) \\ : -a_2 a_3 b_1 x'_3 (2b_1 x'_2 + c_1 x'_1). \end{aligned}$$

C'est une inversion, dont les points fondamentaux sont les nœuds $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ et le point commun aux droites

$$2a_2 x_3 + a_3 x_1 = 0, \qquad 2b_1 x_2 + c_1 x_1 = 0.$$

Le troisième point diagonal des quadrangles décrit la conique

$$a_1 x_3 x_2 + b_1 x_3 x_1 + a_2 x_1 x_2 = 0;$$

elle ne dégénère que si l'un de ses coefficients s'annule, hypothèse que nous pouvons exclure provisoirement.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_3^2 & -2a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 \\ x_2^2 & a_1 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 \end{vmatrix} = 0;$$

elle montre les involutions projectives

$$\begin{aligned} \lambda x_3^2 - 2a_2 x_3 x_1 - a_3 x_1^2 = 0, \\ x_2^2 (a_1 + \lambda) + 2b_1 x_2 x_1 + c_1 x_1^2 = 0, \end{aligned}$$

dont la première, combinée avec l'équation d'une droite u, donne cette troisième involution

$$\begin{aligned} x_2^2 \lambda u_2^2 + 2x_2 x_1 (\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3) \\ + x_1^2 (\lambda u_1^2 + 2a_2 u_3 u_1 - a_3 u_3^2) = 0. \end{aligned}$$

La seconde et la troisième involution ont un couple

commun si l'on a

$$\frac{\lambda u_2^2}{a_1+\lambda} = \frac{\lambda u_2 u_1 + a_2 u_2 u_3}{b_1} = \frac{\lambda u_1^2 + 2 a_2 u_3 u_1 - a_3 u_2^2}{c_1}.$$

L'élimination de λ donne, après simplification par u_1, u_2, u_3, une équation cubique en u. Les conditions pour que les équations précédentes aient deux racines communes en λ donnent les tangentes doubles de l'enveloppe; elles conduisent à

$$\left\| \begin{matrix} u_2^2 & 0 & 1 & a_1 \\ u_2 u_1 & a_2 u_2 u_3 & 0 & b_1 \\ u_1^2 & 2 a_2 u_3 u_1 - a_3 u_2^2 & 0 & c_1 \end{matrix} \right\| = 0;$$

en simplifiant par $u_1 u_3$, on obtient

$$c_1 u_2 = b_1 u_1, \qquad a_3 u_3 = a_2 u_1.$$

Cette tangente double joint deux points représentés respectivement par ces deux dernières relations; ils sont situés sur les côtés x_3 et x_2 du triangle de référence et sur les droites respectives

$$c_1 x_1 + b_1 x_2 = 0, \qquad a_3 x_1 + a_2 x_3 = 0,$$

c'est-à-dire sur les polaires de chacun des nœuds x_1, x_3 et x_1, x_2 relativement aux tangentes à l'autre.

Dans une quadrique trinodale quadrillée, le troisième point diagonal des quadrangles inscrits décrit une conique et les diagonales de ces quadrangles enveloppent une courbe de troisième classe possédant une tangente double.

Dans les cas, exclus plus haut, où l'on a, soit $b_1 = 0$, soit $a_2 = 0$, les résultats, faciles à établir, se résument comme suit :

Un des nœuds est un point double d'inflexion; la

courbe a deux séries de quadrangles inscrits ayant des points diagonaux en deux couples de nœuds ; pour chaque série de quadrangles, les sommets opposés se correspondent dans une semi-inversion trilinéaire, le troisième point diagonal décrit une droite et les diagonales enveloppent une conique.

Si l'on a simultanément $b_1 = 0$ et $a_2 = 0$, *il y a une série de quadrangles inscrits ayant leurs trois points diagonaux aux trois nœuds de la courbe; les sommets opposés de ces rectangles se correspondent dans une collinéation; les trois nœuds sont des points doubles d'inflexion. Et, chaque fois qu'une quartique a trois points doubles d'inflexion, elle est ainsi triplement quadrillée.*

10. Nous avons toujours exclu le cas où la courbe φ dégénère en une droite et une cubique. Examinons à présent cette hypothèse; choisissons la droite en question pour côté x_1 du triangle de référence, ce qui revient à faire $a_1 = 0$ dans l'équation φ. Les raisonnements précédents font découvrir, pour la cubique

$$x_3^2(2b_1x_2 + c_1x_1) + 2x_3(a_2x_2^2 + 2b_2x_2x_1 + c_2x_1^2) \\ + x_1(a_3x_2^2 + 2b_3x_2x_1 + c_3x_1^2) = 0,$$

un certain nombre de propriétés, la plupart connues. Il nous suffira d'énoncer les résultats.

La cubique possède des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en deux points M *et* N *de la courbe,* choisis pour sommets x_1x_2 et x_1x_3 *si l'on a*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En écartant d'abord le cas où $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$, on

voit qu'on peut faire évanouir c_1 et a_3, car il suffit de prendre pour côtés du triangle de référence les tangentes en M et N. Alors, pour que Δ soit nul, il faut que c_3 le soit, donc que la courbe passe par le point P de rencontre des tangentes en M et N; ainsi *les deux points* M *et* N *ont même tangentiel* et, par raison de symétrie, *il en est de même de deux sommets opposés quelconques d'un quadrangle steinérien. Le troisième point diagonal des quadrangles parcourt une droite; leurs diagonales enveloppent une courbe de troisième classe; leurs sommets opposés se correspondent dans une inversion ayant* M, N, P *pour points fondamentaux.*

L'hypothèse $b_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ correspond au cas où l'un des points M, N est un point d'inflexion; elle entraine quelques modifications faciles à énoncer.

11. Si, au lieu d'une quartique, on a un système de deux coniques circonscrites au triangle de référence,

$$(\alpha x_2 x_3 + \beta x_3 x_1 + \gamma x_1 x_2)(\alpha' x_2 x_3 + \beta' x_3 x_1 + \gamma' x_1 x_2) = 0,$$

les raisonnements du n° 9 s'appliquent : pour qu'il y ait des quadrangles inscrits à deux points diagonaux aux nœuds $x_1 x_2$ et $x_1 x_3$, il faut que le terme en $x_1^2 x_2 x_3$ manque dans l'équation ci-dessus, ou que l'on ait

$$\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\beta'}{\gamma'},$$

et les tangentes aux deux coniques en leur troisième point commun $C(x_2 = 0, x_3 = 0)$ doivent être séparées harmoniquement par les deux premiers points A et B. Evidemment la même propriété doit exister pour les tangentes au quatrième point commun D.

D'après cela, les coniques données Γ_2 et Γ'_2, appartenant au faisceau de coniques de base ABCD, y sont séparées harmoniquement par les couples de droites AC, BD et AD, BC. Par suite les tangentes à Γ_2 et Γ'_2 en A (ou B) sont séparées harmoniquement par C et D; donc il y a un second système de quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Le pôle de AB par rapport à la conique Γ_2 a pour coordonnées

$$-\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

Sa polaire relative à Γ'_2 est

$$-\alpha(\beta' x_3 + \gamma' x_2) + \beta(\alpha' x_3 + \gamma' x_1) + \gamma(\alpha' x_2 + \beta' x_1) = 0$$

ou, à cause de $\beta\gamma' + \beta'\gamma = 0$,

$$x_2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + x_3(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0.$$

Cette droite n'est autre que CD, car son équation s'obtient aussi en éliminant le terme en $x_2 x_3$ des équations des deux coniques.

Il y a donc un point $M(-\alpha, \beta, \gamma)$ qui est à la fois pôle de AB pour Γ_2 et pôle de CD pour Γ'_2; et pareillement un point analogue $N(-\alpha', \beta', \gamma')$, pôle de AB pour Γ'_2 et de CD pour Γ_2.

Le troisième point diagonal des quadrangles inscrits à points diagonaux en A et B décrit la conique

$$2\alpha\alpha' x_2 x_3 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x_1 x_2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) x_1 x_3 = 0.$$

Elle passe par A, B, C, donc aussi par D; elle passe par M et N, et, dans le faisceau des coniques ayant pour base ABCD, elle est harmoniquement séparée du couple de droites AB, CD par les coniques proposées Γ_2 et Γ'_2. Elle est aussi le lieu du troisième point diagonal des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux en C et D.

Deux sommets opposés d'un quadrangle inscrit, de la première série par exemple, sont toujours sur une même conique Γ_2 ou Γ'_2. Ceux qui sont sur Γ_2 sont projetés de A suivant une involution dont AC et AD sont les rayons doubles; donc ces couples de sommets sont en involution sur la conique et sont alignés sur le pôle N de CD. Ainsi l'enveloppe des diagonales des quadrangles se réduit aux deux points M et N.

Les deux coniques se correspondent à elles-mêmes dans une inversion dont les points fondamentaux sont A et B et un troisième point E défini par les relations

$$\beta\beta' x_1 + (\alpha\beta' + \beta\alpha') x_2 = 0,$$
$$\gamma\gamma' x_1 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x_3 = 0.$$

On vérifie très facilement que ce point est situé sur les droites CD et MN.

Pareillement les deux coniques se conservent dans une inversion ayant pour points fondamentaux C, D et l'intersection F de AB et MN.

De ces deux transformations, la première fait correspondre, sur Γ_2, deux sommets opposés d'un quadrangle de la première série, donc deux points x et y alignés sur N. Soit alors G l'intersection de AB et de CD et soient y et z deux points de Γ_2 alignés sur G; sur la conique Γ_2, les points x et z sont des éléments correspondants d'une involution, puisque N et G sont conjugués par rapport à la conique; le pôle de cette involution est le pôle de NG ou E; dans le plan, ces points x et z se correspondent dans une transformation birationnelle quadratique; celle-ci est le produit de l'inversion ayant E, A, B pour points fondamentaux et de l'homologie ayant pour pôle G et pour axe MN ou EF. Dans cette transformation composée, les points fondamentaux de l'un des systèmes sont E, A, B et

leurs homologues dans l'autre E, B, A; c'est donc une *transformation de Hirst.*

Il est facile d'écrire l'invariant simultané de deux coniques qui doit s'annuler quand ces courbes forment un système quadrillé; mais nous ne traiterons pas cette question ici.

12. Appliquons les résultats du numéro précédent à deux cercles se coupant en A et B. Pour qu'ils forment un système quadrillé, il faut que leurs tangentes en A (ou B) soient séparées harmoniquement par les points cycliques, ou soient rectangulaires.

Ainsi, *deux cercles* C_1 *et* C_2 *se coupant à angle droit ont des quadrangles inscrits ayant deux points diagonaux aux points cycliques.*

Pour former un tel quadrangle, il faut prendre un point P de C_1, le joindre aux points cycliques; on obtient deux droites imaginaires (isotropes) coupant le cercle C_2 en deux points imaginaires I et I' situés sur l'axe radical du cercle C_2 et du cercle nul P. Les points I' et I, joints à leur tour aux points cycliques, donnent deux autres droites imaginaires se coupant en un point réel Q de C_1. Les cercles nuls P et Q ont, avec C_2, même axe radical et sont alignés sur le centre de ce cercle. L'étude actuelle conduit donc à cette propriété connue : *tout cercle* C_1 *passant par les points limites* P *et* Q *d'un faisceau de cercles coupe orthogonalement tous les cercles de ce faisceau.*

En interprétant la transformation de Hirst rencontrée ci-dessus, on trouve ce théorème de Géométrie élémentaire :

Soient deux cercles se coupant à angle droit, P *et* Q *deux points de l'une des circonférences ali-*

gnés sur le centre de l'autre, P′ *le symétrique de* P *par rapport à la ligne des centres;* P′ *et* Q *se correspondent dans une transformation par vecteurs réciproques ayant pour pôle le milieu de la corde commune.*

Les deux cercles C_1 et C_2 ont aussi des quadrangles inscrits à deux points diagonaux en A et B, ce qui conduit à cette autre propriété :

Dans deux cercles se coupant à angle droit, on peut inscrire une infinité de quadrangles ayant deux points diagonaux aux points communs A *et* B *des cercles; les sommets opposés de chaque quadrangle sont aux extrémités d'un diamètre d'un cercle; le troisième point diagonal des quadrangles décrit la circonférence passant par* A, B *et par les centres des cercles donnés.*

Ici se termine ce que nous voulions exposer des quartiques planes quadrillées; nous espérons consacrer un autre travail aux intersections mutuelles de courbes pareilles et aux propriétés de leurs tangentes en des couples de sommets opposés des quadrangles inscrits.

BIQUADRATIQUE GAUCHE DE PREMIÈRE ESPÈCE.

13. Soit c_4 une biquadratique gauche, intersection de deux quadriques, dans le cas le plus général. Cette courbe est projetée d'un point extérieur A, suivant un cône du quatrième ordre à deux génératrices doubles; la trace de ce cône sur un plan quelconque est une quartique binodale qui, moyennant une seule condition, est quadrillée; dans ce cas le cône perspectif à la courbe sera dit aussi *quadrillé*. Donc, *il existe une*

double infinité de cônes quadrillés perspectifs à la biquadratique.

Considérons le cône quadrillé de sommet A : il existe, sur c_4, une infinité simple de quadrangles tels que deux côtés opposés rencontrent une bisécante AO issue de A, tandis que les deux autres côtés rencontrent la seconde bisécante AO′; mais AO et AO′ sont deux génératrices de la quadrique F passant par A et par c_4; donc les couples de côtés opposés de ces quadrangles sont aussi des génératrices de l'un et de l'autre système de F. Or, cette propriété est connue; la surface F est alors une des six *quadriques de Voss* du faisceau ayant pour base c_4.

Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche de la première espèce se compose des six quadriques de Voss du faisceau ayant pour base la courbe donnée.

En appliquant la méthode des projections centrales aux propriétés exposées antérieurement pour les quartiques et les cubiques quadrillées, nous aurions pu retrouver le nombre de ces quartiques et leurs principales propriétés, notamment celle-ci, qui est connue et a été établie par l'emploi des fonctions elliptiques :

Dans le faisceau $F + kF'$ *ayant pour base la courbe* c_4, *il y a quatre cônes définis par une forme du quatrième ordre en* λ; *les six quadriques de Voss sont définies par le covariant sextique de cette forme.*

On remarquera l'analogie de cette propriété avec celle de deux coniques formant un système quadrillé, d'être séparées harmoniquement par deux courbes dégénérées du faisceau qu'elles déterminent.

Nous n'insistons pas sur la théorie des quadriques

de Voss, qui est trop connue. Énonçons seulement quelques résultats qui se déduisent très facilement de nos paragraphes antérieurs.

Les droites issues d'un point quelconque d'une quadrique de Voss et s'appuyant sur les couples de diagonales des quadrangles inscrits correspondants engendrent un cône du second degré.

Les diagonales de ces quadrangles engendrent une surface réglée de quatrième classe et de quatrième ordre ayant une développable bitangente de seconde classe.

Les sommets opposés de ces quadrangles se correspondent dans une collinéation.

BIQUADRATIQUE GAUCHE RATIONNELLE.

14. On sait que tout cône perspectif à cette courbe est du quatrième ordre et possède trois génératrices doubles.

Soit AB une bisécante de la courbe γ_4 et, s'il est possible, sur cette bisécante, un point P qui soit le sommet d'un cône quadrillé, de manière que deux côtés opposés de chaque quadrangle inscrit rencontrent PAB, les deux autres s'appuyant sur une autre bisécante PCD.

Les propriétés des quartiques quadrillées donnent, par projection, la condition pour que le point P réponde à la question : les plans tangents au cône (P) issus de PAB doivent toucher ce cône suivant deux génératrices situées dans un plan contenant PCD. Ou encore : si M et N sont les contacts des tangentes à γ_4 qui rencontrent PAB, il faut et il suffit que MN rencontre CD. Mais les bisécantes qui rencontrent MN engendrent une

surface du troisième ordre contenant la courbe γ_4 et coupant PAB en un seul point P.

Soit ensuite Q un point de AB tel que le cône de sommet Q perspectif à la quartique soit quadrillé, mais de façon que les couples de côtés opposés des quadrangles inscrits rencontrent les deux autres bisécantes QEF, QGH issues de Q.

D'après un théorème établi plus haut, les plans tangents au cône (Q) le long de la génératrice double AB doivent séparer harmoniquement les plans (AB, EF) et (AB, GH). Or, ces plans tangents sont déterminés par AB et par les tangentes à γ_4 respectivement en A et B; les couples de plans séparés harmoniquement par ces deux plans tangents sont en involution quadratique. D'autre part, les plans déterminés par AB et par les seconde et troisième bisécantes issues d'un point variable de AB sont aussi des couples d'une involution quadratique ayant pour éléments doubles les plans qui contiennent les trisécantes issues de A et de B. Deux involutions ont un seul couple commun; il y a donc, sur AB, un seul point Q répondant à la question.

Toutefois, si la tangente en A à γ_4 rencontre encore la courbe, les deux involutions ont un élément double commun et n'en ont point d'autre; alors Q coïncide avec A. Et, si les tangentes en A et en B à γ_4 rencontrent encore la courbe, les deux involutions ont les mêmes éléments doubles et coïncident; alors, tous les points de AB sont des points Q.

En résumé, *sur une bisécante quelconque il y a, en général, deux points* P *et* Q, *sommets de cônes circonscrits quadrillés.*

Le lieu des sommets des cônes quadrillés est donc une certaine surface S qui peut contenir la quartique comme courbe multiple d'ordre x. Une bisécante coupe S en

deux points simples et deux points x^{uples}; par suite, le degré de la surface est $2x + 2$. Une trisécante à trois appuis distincts ne peut pas rencontrer S en dehors de γ_4, d'où il résulte que le degré de la surface est aussi $3x$. Finalement x est égal à 2 et la surface S est du sixième ordre.

La courbe γ_4 possède, comme on sait, quatre tangentes qui la rencontrent encore; les six droites joignant deux à deux les contacts de ces tangentes sont tout entières sur S. Si A est un de ces contacts, une bisécante quelconque par A ne perce plus la surface qu'en un seul point P, car on a vu que le point Q coïncide avec A. Donc, ces quatre contacts sont des points triples de S. Les tangentes en ces points rencontrent la surface en un point double, un point triple et encore un point double infiniment voisin du point triple, ce qui équivaut à sept intersections; ces tangentes sont donc tout entières sur S.

Le lieu des sommets des cônes quadrillés perspectifs à une biquadratique gauche rationnelle est une surface du sixième ordre ayant la biquadratique comme courbe double, possédant quatre points triples aux contacts des tangentes qui rencontrent encore la courbe, et passant par ces tangentes et par les six droites qui joignent, deux à deux, les contacts de ces tangentes.

On sait que la biquadratique rationnelle possède trois cordes, les *cordes principales de Bertini,* qui sont chacune l'intersection des plans osculateurs à la courbe en leurs extrémités; ces cordes se coupent en un même point R. *Le point* R *est le sommet d'un cône triplement quadrillé perspectif à la courbe. C'est un point double de la surface* S.

SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE A CUBIQUE GAUCHE DOUBLE.

15. Le problème se pose tout naturellement de chercher, pour les surfaces du quatrième ordre, quelles sections planes sont des courbes quadrillées à deux ou trois nœuds. Si l'on considère la surface quartique la plus générale, la question est probablement fort difficile; mais elle se simplifie beaucoup et donne quelques résultats intéressants si l'on considère les surfaces douées de lignes singulières, par exemple la *surface de Steiner*, la quartique à deux droites doubles, etc.

A titre d'exemple, nous donnons ici quelques détails sur la surface du quatrième ordre S_4 ayant pour courbe double une cubique gauche représentée par les relations paramétriques

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1.$$

Si l'on pose

$$X_1 = x_2 x_4 - x_3^2, \qquad X_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4, \qquad X_3 = x_1 x_3 - x_2^2,$$

on sait que la surface considérée, la plus générale, a pour équation

$$a_X^2 \equiv \Sigma a_{ik} X_i X_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, 3).$$

Les ∞^3 sections planes sont des quartiques trinodales parmi lesquelles ∞^2 sont quadrillées. Les plans de ces dernières enveloppent une surface.

Pour trouver l'équation de cette surface, nous appliquons le *principe de translation de Clebsch*, un peu modifié. Un plan u sera défini par les trois points où il coupe la cubique double; soient θ_1, θ_2, θ_3 les para-

mètres de ces points généralement distincts. Un point quelconque du plan u a pour coordonnées

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= \lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3,\\
\rho x_2 &= \lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2,\\
\rho x_3 &= \lambda\theta_1\ + \mu\theta_2 + \nu\theta_3,\\
\rho x_4 &= \lambda\quad + \mu\quad + \nu,
\end{aligned}$$

et λ, μ, ν sont, dans le plan u, les coordonnées du point x rapporté au triangle dont les sommets sont θ_1, θ_2, θ_3.

Portons les valeurs de x_i, d'abord dans les formes X :

$$\begin{aligned}
\rho^2 X_1 &= (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)(\lambda + \mu + \nu)\\
&\quad - (\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3)^2\\
&= \Sigma\lambda\mu(\theta_1 - \theta_2)^2,\\
\rho^2 X_2 &= (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2 + \nu\theta_3)\\
&\quad - (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda + \mu + \nu)\\
&= \Sigma - \lambda\mu(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)^2,\\
\rho^2 X_3 &= (\lambda\theta_1^3 + \mu\theta_2^3 + \nu\theta_3^3)(\lambda\theta_1 + \lambda\theta_2 + \nu\theta_3)\\
&\quad - (\lambda\theta_1^2 + \mu\theta_2^2 + \nu\theta_3^2)^2\\
&= \Sigma\,\lambda\mu\theta_1\theta_2(\theta_1 - \theta_2)^2.
\end{aligned}$$

La substitution dans l'équation $a_X^2 = 0$ donne le résultat symbolique suivant :

$$\{\Sigma(\theta_1 - \theta_2)^2\lambda\mu[a_1 - a_2(\theta_1 + \theta_2) + a_3\theta_1\theta_2]\}^2 = 0.$$

Pour que la section soit quadrillée avec des quadrangles ayant deux points diagonaux en θ_1 et θ_2, nous avons vu que le terme en $\lambda\mu\nu^2$ de l'équation précédente doit s'annuler; donc, si l'on fait abstraction du facteur étranger, généralement non nul, $(\theta_2 - \theta_3)^2(\theta_3 - \theta_1)^2$, on doit avoir

$$[a_1 - a_2(\theta_2 + \theta_3) + a_3\theta_2\theta_3][a_1 - a_3(\theta_3 + \theta_1) + a_3\theta_3\theta_1] = 0.$$

Développons, sous forme non symbolique,

$$a_{11} - a_{12}(\Sigma\theta_1 + \theta_3) + a_{13}(\theta_3\Sigma\theta_1 - \theta_3^2) + a_{22}(\Sigma\theta_1\theta_2 + \theta_3^2) - a_{23}(\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3\Sigma\theta_1\theta_2) + a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3^2 = 0,$$

ou encore

$$a_{11} - a_{12}\Sigma\theta_1 + a_{22}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{23}\theta_1\theta_2\theta_3 - \theta_3(a_{12} - a_{13}\Sigma\theta_1 + a_{23}\Sigma\theta_1\theta_2 - a_{33}\theta_1\theta_2\theta_3) + \theta_3^2(a_{22} - a_{13}) = 0,$$

en abrégé

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0,$$

n et p étant des fonctions symétriques de $\theta_1\theta_2\theta_3$.

Il est facile d'introduire les coordonnées du plan u, car on a

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -\Sigma\theta_1 : \Sigma\theta_1\theta_2 : -\theta_1\theta_2\theta_3;$$

appelons M, N, P ce que deviennent m, n, p quand on fait les substitutions; il vient

$$M = m = a_{22} - a_{13},$$

$$N u_1 = -(a_{12}u_1 + a_{13}u_2 + a_{23}u_3 + a_{33}u_4),$$
$$P u_1 = \quad a_{11}u_1 - a_{12}u_2 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4.$$

L'équation $m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0$ devient alors

$$M\theta_3^2 + N\theta_3 + P = 0.$$

Elle exprime une certaine *liaison* entre un plan u et un point θ_3 de la cubique; si, en outre, ce point est dans le plan u ou si l'on a

$$u_1\theta_3^3 + u_2\theta_3^2 + u_3\theta_3 + u_4 = 0,$$

le plan u est une section quadrillée. L'enveloppe de ces plans u se trouve un éliminant simplement θ_3 entre les deux dernières égalités. Le résultant est un déterminant à cinq lignes; mais les formes N et P con-

tiennent u en dénominateur; pour chasser ce dénominateur, on multiplie les trois premières lignes du déterminant par u_1 et l'on divise ensuite la première colonne par u_1; on obtient

$$F_4 \equiv \begin{vmatrix} . & . & M u_1 & (N u_1) & (P u_1) \\ . & M u_1 & (N u_1) & (P u_1) & \dots\dots \\ M & (N u_1) & (P u_1) & \dots\dots & \dots\dots \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots\dots \\ . & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une surface de quatrième classe. Elle est vérifiée pour $u_4 = (P u_1) = 0$, et ces deux relations représentent deux points; la droite qui les joint est donc tout entière sur F_4. Mais $u_4 = 0$ représente le sommet (1, 2, 3) du tétraèdre de référence ou le point de paramètre nul de la cubique gauche. Ce point peut être évidemment un point quelconque de la courbe. Donc F_4 est une surface réglée, et, par suite, elle est du quatrième ordre.

On pouvait prévoir que l'enveloppe cherchée serait une surface réglée en se reportant à l'équation

$$m\theta_3^2 + n\theta_3 + p = 0$$

qui, pour chaque valeur de θ_3, donne une involution de points θ_1 et θ_2. Les droites qui joignent ces couples de points engendrent un système réglé et sont projetées du point θ_3 suivant un faisceau de plans; l'axe de ce faisceau est une génératrice rectiligne de l'enveloppe cherchée F_4.

Nous pouvons obtenir les plans tangents doubles de F_4 ou les plans des sections doublement quadrillées de la surface initiale donnée S_4. Si u est un de ces plans, il présente la liaison

$$M\theta_3^2 + N\theta_3 + P = 0$$

avec *deux* des points où il coupe la cubique; donc cette équation et la suivante,

$$u_1\theta_3^3 + u_2\theta_3^2 + u_3\theta_3 + u_4 = 0,$$

ont *deux* racines communes, ce qui s'exprime par l'évanouissement d'une matrice à quatre colonnes et trois lignes; en chassant, comme précédemment, le dénominateur u_1, on obtient

$$\left\| \begin{matrix} . & Mu_1 & (Nu_1) & (Pu_1) \\ M & (Nu_1) & (Pu_1) & \dots\dots \\ 1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ceci représente la développable circonscrite partielle à deux surfaces de seconde classe

$$\left| \begin{matrix} . & Mu_1 & (Nu_1) \\ M & (Nu_1) & (Pu_1) \\ 1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right| = 0, \qquad \left| \begin{matrix} . & Mu_1 & (Pu_1) \\ M & (Nu_1) & \dots\dots \\ 1 & u_2 & u_4 \end{matrix} \right| = 0,$$

qui ont encore en commun le faisceau de plans tangents

$$\left\| \begin{matrix} . & M & 1 \\ Mu_1 & (Nu_1) & u_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

La développable des plans bitangents de F_4 est donc de troisième classe; c'est la développable osculatrice d'une cubique gauche.

Ainsi, *l'enveloppe des sections quadrillées d'une surface* S_4 *de quatrième ordre à cubique double est une surface de quatrième classe* F_4, *ayant une développable bitangente de troisième classe.*

16. Quand une surface réglée de quatrième classe a une développable bitangente de troisième classe, elle a, soit une cubique double, soit une droite triple. Il faut

examiner lequel de ces deux cas se présente ici : la théorie de l'élimination va nous fournir encore la réponse à cette question.

Remarquons que, si θ_3 désigne un point fixe de la cubique gauche, double sur S_4, l'équation

$$M u_1 \theta_3^2 + (N u_1)\theta_3 + (P u_1) = 0$$

ou

$$(a_{22} - a_{13}) u_1 \theta_3^2 - (a_{12} u_1 + a_{13} u_2 + a_{23} u_3 + a_{33} u_4)\theta_3 \\ + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{22} u_3 + a_{23} u_4 = 0$$

est celle d'un point y; tout plan u qui passe par ce point et par le point θ_3 est tangent à la surface F_4; la droite qui joint ce point y au point θ_3 de la cubique gauche est une génératrice de F_4. Un point x quelconque de cette génératrice est donné par les relations

$$y_i = \lambda x_i + \mu \theta_3^{4-i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} (a_{22} - a_{13})\theta_3^2 - a_{12}\theta_3 + a_{11} &= \lambda x_1 + \mu\theta_3^3, \\ - a_{13}\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 + \mu\theta_3^2, \\ - a_{23}\theta_3 + a_{22} &= \lambda x_3 + \mu\theta_3, \\ - a_{33}\theta_3 + a_{23} &= \lambda x_4 + \mu. \end{aligned}$$

En éliminant λ, μ, θ_3, on a l'équation ponctuelle de F_4. Éliminons d'abord μ : multiplions chacune des trois dernières relations par θ_3 et retranchons chaque fois de la précédente :

$$\begin{aligned} a_{22}\theta_3^2 - 2a_{12}\theta_3 + a_{11} &= \lambda x_1 - \lambda\theta_3 x_2, \\ a_{23}\theta_3^2 - (a_{13} + a_{22})\theta_3 + a_{12} &= \lambda x_2 - \lambda\theta_3 x_3, \\ a_{33}\theta_3^2 - 2a_{23}\theta_3 + a_{22} &= \lambda x_3 - \lambda\theta_3 x_4. \end{aligned}$$

Il faudrait encore éliminer λ et θ_3 ; mais ce calcul est

superflu : nous ne cherchons que les points triples de F_4, s'il y en a ; à cet effet, nous devons écrire les conditions pour que les trois dernières égalités soient satisfaites par *trois* systèmes de valeurs déterminées de λ et θ_3.

Or ces égalités sont, dans un plan rapporté à des axes cartésiens λ et θ_3, les équations de trois hyperboles ayant l'axe des θ_3 comme direction asymptotique commune.

Pour que ces courbes aient trois points communs à distance finie, il faut qu'elles forment faisceau ou que l'on ait

$$\left\| \begin{matrix} a_{22} & a_{12} & a_{11} & x_1 & x_2 \\ a_{23} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{12} & x_2 & x_3 \\ a_{33} & a_{23} & a_{22} & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

En général, ces relations sont incompatibles. Mais elles représentent une droite quand on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est donc la condition pour que la surface F_4 ait une droite triple. Elle exprime, entre la surface donnée S_4 et sa cubique double, une relation invariante qu'il faut interpréter.

L'équation de S_4 étant, symboliquement,

$$a_X^2 \equiv (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3)^2 = 0,$$

un quelconque de ses points, x, est aligné sur deux points θ et θ' de la cubique double, et l'on a successive-

ment

$$x_i = h\theta^{4-i} + k\theta'^{4-i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$X_1 = (h\theta^2 + k\theta'^2)(h + k) - (h\theta + k\theta')^2$$
$$= hk(\theta - \theta')^2,$$
$$X_2 = (h\theta^2 + k\theta'^2)(h\theta + k\theta') - (h\theta^3 + k\theta'^3)(h + k)$$
$$= -hk(\theta - \theta')^2(\theta + \theta'),$$
$$X_3 = (h\theta^3 + k\theta'^3)(h\theta + k\theta') - (h\theta^2 + k\theta'^2)^2$$
$$= hk(\theta - \theta')^2\theta\theta',$$
$$a_X^2 = [a_1 - a_2(\theta + \theta') + a_3\theta\theta']^2 = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à θ, sous forme non symbolique,

$$\theta^2(a_{22} - 2a_{23}\theta' + a_{33}\theta'^2) - 2\theta[a_{12} - (a_{22} + a_{13})\theta' + a_{23}\theta'] + (a_{11} - 2a_{12}\theta' + a_{22}\theta'^2) = 0.$$

Telle est la relation entre deux points θ et θ' de la cubique double situés sur une même génératrice de S_4. Elle fait correspondre, à tout point θ, deux points θ'; à l'un de ces points θ' répond, outre le point de départ θ, un nouveau point θ''; à celui-ci un quatrième point θ''', etc.

Si le quatrième point de cette série coïncide avec le premier, la surface S_4 est *spéciale,* en ce sens que ses génératrices s'appuient toutes sur une même droite; alors il y a ∞^1 *triangles de Poncelet* inscrits au cône qui projette la cubique d'un de ses points et circonscrits au cône de même sommet et tangent à S_4; on sait que ces deux cônes sont quadratiques.

Mais, pour que ces deux cônes présentent, non des triangles, mais des *quadrilatères de Poncelet,* en d'autres termes, pour que le cinquième point de la série θ, θ', θ'', θ''', ... coïncide avec le premier, ou encore que les génératrices de S_4 s'arrangent en quadrilatères inscrits à la cubique gauche, il faut que la der-

nière relation écrite donne, pour deux valeurs (θ et θ'') attribuées à θ, le même couple de valeurs de θ'(θ' et θ''').

Nous sommes donc ramené au problème d'algèbre qui résout la question des *quadrangles de Steiner* dans la quartique plane binodale, avec cette particularité que la relation entre θ et θ' est symétrique. Le raisonnement fait, au début de notre étude, montre que ces quadrilatères de Poncelet existent si l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & \dfrac{a_{13}+a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément la condition trouvée ci-dessus pour l'existence d'une droite triple sur la surface F_4.

Dans toute surface du quatrième ordre à cubique double, les plans des sections quadrillées enveloppent une autre surface du quatrième ordre douée, en général, d'une cubique gauche double, et exceptionnellement d'une droite triple. Ce dernier cas se réalise quand les génératrices de la surface donnée sont les côtés d'une infinité simple de quadrilatères gauches inscrits dans la cubique donnée.

Observons que le raisonnement précédent ramène toujours le problème des *polygones de Poncelet* de $2n$ côtés pour deux coniques à un cas particulier du problème des *polygones de Steiner* de $2n$ côtés pour une quartique plane binodale.

17. Si l'on demande une section plane de S_4 qui soit triplement quadrillée, il faut trouver un plan u qui possède la relation

$$M\theta^2 + N\theta + P = 0$$

avec trois points θ de la cubique; cette équation du second degré ayant trois racines, tous ses coefficients sont nuls,

$$M = a_{22} - a_{13} = 0,$$

$$N u_1 = -(a_{12} u_1 + a_{13} u_2 + a_{23} u_3 + a_{33} u_4) = 0,$$

$$P u_1 = \quad a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{22} u_3 + a_{23} u_4 \ = 0.$$

La première relation est indépendante de u. Elle n'est vérifiée que si le cône circonscrit à S_4 et de sommet $(1, 2, 3)$ est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à la cubique double. Car les équations tangentielles de ces cônes s'écrivent facilement

$$a_v^2 = (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3)^2 = 0, \qquad v_2^2 - 4 v_1 v_3 = 0,$$

et leur invariant simultané contenant au premier degré les coefficients du premier est

$$2(a_{22} - a_{13}).$$

L'évanouissement de cet invariant est incompatible avec la condition d'une droite triple sur F_4, car si, dans cette condition (*voir* numéro précédent), on remplace a_{22} par a_{13}, on trouve que le discriminant de la forme a_x^4 s'annule, et alors la surface donnée S_4 dégénère en deux quadriques.

Quand donc la condition $a_{22} = a_{13}$ est vérifiée, la surface F_4 a un faisceau de plans tangents triples et c'est une surface du quatrième ordre à cubique double, mais spéciale.

Lorsque le cône circonscrit à la surface donnée S_4 *et ayant son sommet sur la cubique double est harmoniquement inscrit au cône de même sommet perspectif à cette cubique, l'enveloppe des sections planes*

quadrillées de S_4 *est une surface* F_4 *engendrée par les cordes d'une seconde cubique gauche qui s'appuient sur une droite fixe. Les plans passant par cette droite sont les sections triplement quadrillées de* S_4.

[K2c]

EXTENSION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

1. Soit un triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle pédal d'un point D, ou, comme nous dirons, le cercle pédal d'un point D passe au centre P de l'hyperbole équilatère ABCD. Deux points inverses D et D′ ont même cercle pédal; celui-ci rencontre le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points P et P′, qui sont les centres des deux hyperboles équilatères ABCD, ABCD′. Si la droite DD′ passe au point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, les points D′ et D sont sur la conique circonscrite au triangle ABC qui est l'inverse de cette droite, conique qui est une hyperbole équilatère puisqu'elle renferme l'orthocentre H, inverse du point O; les deux hyperboles équilatères ABCD et ABCD′ sont alors confondues, les points P et P′ sont confondus, et le cercle pédal est tangent au cercle des neuf points. Ainsi :

Étant donné un triangle ABC, *si deux points inverses* D *et* D′ *sont en ligne droite avec le centre* O *du cercle circonscrit, le cercle pédal auquel ils donnent lieu est tangent au cercle des neuf points.*

Ce théorème a été donné sous une autre forme par

M. Weill, en considérant la conique de foyers D et D′ inscrite au triangle, et en employant des relations métriques (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 259, th. XVI).

2. Si le point D décrit une droite passant en O, le point D′ décrit une hyperbole équilatère passant en A, B, C, et le cercle pédal du point D passe par un point fixe P′, centre de cette hyperbole, point situé sur le cercle des neuf points du triangle ABC.

Pour déterminer simplement le point P′ qui correspond à une droite passant par O, considérons les points d'intersection D_1 et D_2 de cette droite avec le cercle ABC. Le cercle pédal du point D_1 est remplacé par une droite, droite de Simson, que l'on peut construire comme il suit (le lecteur est prié de faire la figure) : on mène D_1E_1 perpendiculaire à BC, on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en F_1 avec le cercle O, on trace AF_1, et l'on mène par E_1 une parallèle à cette droite ; on opère de même pour le point D_2 ; les deux droites de Simson, rectangulaires, se coupent en P′. Observons que le point M, milieu de BC, est milieu du segment E_1E_2, de sorte que la droite MP′ est médiane du triangle $E_1P'E_2$.

Supposons maintenant que la droite OD tourne autour de O d'un angle α ; D_1 parcourt un arc D_1d_1, F_1 parcourt un arc F_1f_1 égal et de sens contraire, la droite AF_1 tourne de l'angle $-\frac{\alpha}{2}$, il en est de même de la droite de Simson E_1P', et la médiane MP′ tourne de l'angle $-\alpha$. Si Ω est le centre du cercle des neuf points, le rayon $\Omega P'$ tourne de l'angle -2α. Ainsi :

Étant donné un triangle ABC, *si un point* D *décrit une droite passant au centre* O *du cercle circonscrit, le cercle pédal du point* D *passe par un point fixe* P′, *point situé sur le cercle des neuf points du triangle*

ABC. *Si cette droite tourne d'un certain angle autour du point* O, *le rayon* $\Omega P'$ *du cercle des neuf points tourne en sens contraire d'un angle double.*

On a cette conséquence immédiate :

Si D *et* D' *sont deux points inverses, le cercle pédal commun rencontre le cercle des neuf points en deux points* P *et* P', *et l'on a en grandeur et en signe*

$$\widehat{P\Omega P'} = 2(OD, OD'),$$

l'angle (OD, OD') étant déterminé à un multiple près de deux angles droits.

[D2aβ]

SUR LES SÉRIES SEMI-CONVERGENTES;

PAR M. PAUL LÉVY,
Élève de l'École Polytechnique.

On sait que la somme d'une série semi-convergente à termes imaginaires peut prendre une infinité de valeurs lorsque l'on change l'ordre des termes. Mais la démonstration classique de cette proposition ne renseigne pas sur la question de savoir si elle peut prendre une valeur quelconque. On y distingue les termes à partie réelle positive u_p et les termes à partie réelle négative v_q. Posons

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p = S_p + i\Sigma_p.$$

En même temps que q termes à partie réelle négative, on en considère p de l'autre série, p étant une certaine fonction de q telle que la partie réelle de la somme ait

une limite donnée. Cette condition ne définit pas complètement p; si p_1 et p_2 en sont deux déterminations, on sait seulement que l'on a

$$\lim_{q=\infty} (S_{p_1} - S_{p_2}) = 0.$$

On en déduira souvent, la partie réelle et la partie imaginaire de u_p étant du même ordre de grandeur,

$$\lim (\Sigma_{p_1} - \Sigma_{p_2}) = 0.$$

Dans ce cas, la partie imaginaire de la somme de la série proposée apparaît comme une fonction de sa partie réelle. Mais ce n'est pas le cas général, et d'ailleurs ce résultat tient essentiellement à la condition qu'on s'est imposée de respecter l'ordre des termes dans deux séries partielles. Si, au lieu de deux pareilles séries, on en constitue trois, on aura évidemment une plus grande indétermination sur la somme, et peut-être sera-t-il possible de répondre complètement à la question posée au début.

Considérons d'abord un cas en apparence très particulier, celui où tous les termes de la série sont représentés dans le plan par des vecteurs parallèles à l'une ou l'autre de trois demi-droites Ox, Oy, Oz; de plus, ces trois demi-droites partagent le plan autour du point O en trois angles dont aucun n'atteint deux droits, et enfin chaque série partielle est divergente, son terme général tendant vers zéro. Je dis qu'en respectant l'ordre des termes dans chaque série partielle, on peut donner à la somme de la série étudiée une valeur quelconque. Autrement dit, on peut porter bout à bout les vecteurs représentant ces termes, de manière à atteindre à la limite un point S donné arbitrairement. Par S, menons les demi-droites SX, SY, SZ parallèles

à Ox, Oy, Oz, qui partagent le plan en trois régions E_x, E_y, E_z, et imposons-nous la condition de prendre un vecteur parallèle à Ox chaque fois que le dernier sommet de la ligne brisée formée sera dans E_x, et opérons de même pour les deux autres séries partielles (SX pourra être indifféremment regardé comme appartenant à E_y ou E_z). Il résulte d'abord de la divergence de chaque série partielle que le dernier sommet de la ligne brisée sera une infinité de fois dans chacune des trois régions distinguées, et, par suite, que l'on ne négligera, en opérant comme il vient d'être indiqué, aucun terme de la série proposée. A l'instant où l'on considère le sommet S_n, soient a, b, c des limites supérieures des modules des termes restant dans chaque série; portons sur SX, SY, SZ des longueurs $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, puis, par A, B, C, menons des parallèles à SY et SZ, à SZ et SX, à SX et SY. On aura ainsi un hexagone H. Soit maintenant S_{n+p} un sommet tel qu'entre S_n et S_{n+p}, il y ait au moins un sommet dans chacune des régions E_x, E_y, E_z. On vérifie facilement que S_{n+p} et tous les sommets suivants sont intérieurs à l'hexagone H. Or a, b et c tendent vers 0; on en déduit la proposition annoncée.

Considérons maintenant une série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

satisfaisant à la seule condition que u_n tende vers zéro; u_n est représenté par un vecteur OA_n qui coupe en a_n un cercle de centre O et de rayon arbitraire et constant, a_n étant par rapport à O du même côté que A_n; soit sur ce cercle un arc bc. Il peut arriver que les valeurs de n pour lesquelles a_n est intérieur à cet arc soient en nombre infini et que les modules des termes correspondants aient une somme infinie. Si cette double

condition n'est pas réalisée, il est évident que le rang de ces termes est sans influence sur la somme de la série. Dans le cas où elle l'est, il existe certainement sur bc un point a tel que tout arc $b'c'$, si petit qu'il soit, qui comprend a à son intérieur, jouit de la même propriété que bc; en particulier, si la série donnée n'est pas absolument convergente, il existe au moins un tel point sur le cercle. Nous dirons que a est un *point d'indétermination* pour la série (1). Si l'on veut distinguer, selon que cette propriété appartient à ac' ou à ab', on dira que a est un point d'indétermination du côté de l'arc ac ou du côté de l'arc ab. Il est encore nécessaire d'établir une autre distinction; décomposons tous les vecteurs OA_n pour lesquels a_n est intérieur à ab' suivant Oa et la direction perpendiculaire Oa_1. Si les composantes suivant Oa_1 ont une somme infinie, quelque petit que soit ab', le point a sera dit de *première espèce* du côté de l'arc ab; sinon il sera dit de *deuxième espèce*. Tous les points d'indétermination pour la série (1) forment sur le cercle un ensemble E; si une infinité de points de cet ensemble ont pour limite un point a et sont d'un même côté de ce point, on voit facilement que, de ce côté, le point a est un point d'indétermination de première espèce; à cette condition près, on peut choisir arbitrairement l'ensemble E et assujettir ses points à être d'un côté ou de l'autre d'une espèce ou de l'autre, il existera toujours une série satisfaisant à ces conditions.

Considérons un arc ab inférieur à un demi-cercle et contenant des points de l'ensemble E, et choisissons deux axes, Ox intérieur à cet angle et tel que, dans chacun des angles aOx et bOx, il y ait des points de l'ensemble E, et Ox' extérieur à cet angle. Décomposons suivant ces deux directions tous les vecteurs cor-

respondant à des points de l'arc ab; les composantes suivant Ox formeront une série divergente à termes tous de même signe; les composantes dirigées suivant Ox' formeront une série semi-convergente, dont on pourra annuler la somme en déterminant convenablement l'ordre des termes. A condition de ne plus changer cet ordre dans la suite des opérations, on pourra négliger ces composantes sans que cela ait d'influence sur la somme de la série (1). Remarquons de plus que, si l'arc ab est égal à un demi-cercle, si les seuls points de l'ensemble E situés sur cet arc sont a et b, et si l'un des deux au moins est de première espèce du côté de l'arc considéré; on peut encore opérer de la même manière en prenant Ox quelconque et Ox' confondu avec ab et le résultat sera le même.

En général, on pourra diviser le cercle en trois arcs et opérer la même réduction, en choisissant les trois directions Ox, Oy, Oz comme il a été dit plus haut. On sera alors ramené au cas particulier déjà étudié. La somme de la série est donc complètement arbitraire. Cette manière d'opérer est en défaut dans les deux cas suivants :

1° Tous les points de l'ensemble E sont intérieurs à un arc ab au plus égal à un demi-cercle et qui peut être nul; s'il est égal à un demi-cercle, les points a et b doivent être de seconde espèce du côté du demi-cercle complémentaire. Dans ce cas, la série (1) est toujours divergente, le point qui représente la somme des termes s'éloignant à l'infini dans une direction arbitraire intérieure à l'angle aOb.

2° L'ensemble E se réduit à deux points a et b diamétralement opposés et tous les deux de seconde espèce. Dans ce cas, les composantes des vecteurs OA_n perpendiculaires à ab ont une somme indépendante de

l'ordre des termes, et la somme des composantes parallèles à ab peut prendre la valeur que l'on veut. La somme de la série sera alors représentée par un point choisi arbitrairement sur une droite.

Ce résultat peut d'ailleurs se généraliser; au lieu de raisonner dans le plan, raisonnons dans l'espace à n dimensions. Nous appellerons alors *plan* le lieu de points dont les coordonnées satisfont à un certain nombre de relations linéaires, ce nombre pouvant être égal comme valeurs extrêmes à 0, $n-1$, ou n, auxquels cas le plan se réduit à tout l'espace, une droite ou un point. Soit une suite infinie de vecteurs tels qu'il n'y en ait qu'un nombre fini dont la longueur soit supérieure à un nombre donné, quel que soit ce nombre. En portant ces vecteurs bout à bout, on obtient un point S_n qui tend à la limite vers un certain point S. En changeant l'ordre des vecteurs, le point S peut varier et son lieu est un plan; le plan peut d'ailleurs comprendre tout l'espace ou se réduire à un point; dans ce dernier cas, c'est que les n séries partielles formées par les composantes sont toutes absolument convergentes; ajoutons que, si l'on range les vecteurs dans un ordre quelconque, S_n n'a pas en général de limite, à moins que les n séries partielles ne soient absolument convergentes. Ce que nous venons de dire est en défaut dans un cas où S_n s'éloigne nécessairement à l'infini, dans une direction qui, si elle est déterminée, est seulement assujettie à être à l'intérieur d'un certain cône convexe. Ces différentes propositions se démontrent par un procédé analogue à celui que nous avons employé dans le cas du plan; le principe consiste dans la décomposition de la suite étudiée en $n+1$ suites partielles.

[A3b]

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES; FORMULES DE NEWTON;

PAR M. C.-A. LAISANT.

Les formules classiques de Newton, relatives aux sommes des puissances semblables dès racines d'une équation algébrique, peuvent être établies par une methode qui évite, pour ainsi dire, tout calcul, et qui mériterait de passer dans l'enseignement, car elle dispense de tout effort de mémoire. Nous nous proposons de l'indiquer ici.

Si

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

est une équation algébrique ayant pour racines $a, b, \ldots, l$, nous désignerons, comme d'habitude, par $S_1, S_2, \ldots$ la somme des racines, la somme de leurs carrés, etc.

Par substitution des racines, et addition, il est évident que l'on a

$$(1) \qquad A_0 S_m + A_1 S_{m-1} + \ldots + A_{m-1} S_1 + m A_m = 0.$$

D'autre part, on a, en vertu des relations entre les racines et les coefficients,

$$A_0 S_1 + A_1 = 0,$$

c'est-à-dire que S_1 ne dépend que de A et A_1. Si l'on veut trouver S_2, en se rappelant que $\frac{A_2}{A_0} = \Sigma ab$, on a

$$S_2 = (a + b + \ldots)^2 - 2\Sigma ab = \frac{A_1^2}{A_0^2} - 2\frac{A_2}{A_0},$$

d'où

$$A_0 S_2 + A_1 S_1 + 2 A_2 = 0,$$

si bien que S_2 ne dépend que de A_0, A_1, A_2.

D'une manière générale, la somme S_p, étant une fonction de degré p, ne pourra jamais dépendre que de A_0, A_1, ..., A_p, et non des coefficients suivants, qui sont des fonctions des racines de degrés supérieurs à p. Par conséquent, toutes les équations qui ont pour coefficients de leurs $p+1$ premiers termes

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p$$

auront mêmes valeurs pour S_1, S_2, ..., S_p. Parmi toutes ces équations, prenons celle de degré p,

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0,$$

et appliquons-lui la formule (1) ci-dessus. Nous aurons

$$A_0 S_p + A_1 S_{p-1} + \ldots + A_{p-1} S_1 + p A_p = 0,$$

c'est-à-dire la formule générale de Newton. Naturellement ceci s'applique à toutes les valeurs entières de p, jusqu'à $p = m$.

Pour plus de clarté, l'équation $f(x) = 0$ aura même S_1 que l'équation

$$A_0 x + A_1 = 0,$$

qui a une racine unique.

Elle aura mêmes S_1 et S_2 que

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0.$$

Elle aura mêmes S_1, S_2 et S_3 que

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0;$$

et ainsi de suite.

Il nous paraît difficile qu'un élève ayant appris, et

compris, cette démonstration si simple, puisse jamais l'oublier.

Remarque. — On reprochera peut-être à cette démonstration un défaut de rigueur, en alléguant que S_p pourrait prendre une forme telle que $\frac{P}{Q}$ par exemple, P et Q étant de certaines fonctions des coefficients A_0, A_1, ... A cette objection il est possible, ce me semble, de répondre que les relations en jeu ne sont pas des égalités arithmétiques, mais bien des identités algébriques; si bien que dans chacune de ces relations il faut supposer que les S et les A sont remplacées par les fonctions des racines que ces lettres représentent. Si donc on avait $S_p = \frac{P}{Q}$, c'est que les deux fonctions P et Q présenteraient un facteur commun; et la fraction $\frac{P}{Q}$, devenue irréductible, devrait prendre simplement la forme d'un polynome homogène de degré p, par rapport aux racines. Les vérifications directes faites sur les cas $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ sont, d'ailleurs, de nature à faire disparaître toute obscurité.

[B12a]

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DE L'ÉQUATION
$X^2 - pX + q = 0$,
p ET q ÉTANT QUELCONQUES;

Par M. A. AURIC.

Nous n'avons trouvé nulle part la solution de cette question, très simple, posée sous sa forme la plus générale, et nous pensons que la solution ci-dessous sera de nature à intéresser peut-être les lecteurs de ce journal.

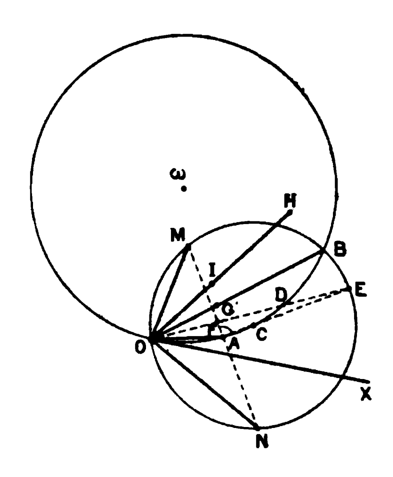
Soit OX la direction des quantités réelles positives

$$\overline{OA} = \frac{p}{2}, \qquad \overline{OB} = \frac{2q}{p},$$

de telle sorte que

$$\overline{OA}.\overline{OB} = q.$$

Il est très facile de déterminer $\overline{OB}$ graphiquement.



Soient le vecteur $\overline{OH} = q$ et OI une longueur égale à l'unité. On fera l'angle

$$\widehat{HOB} = \widehat{AOX}.$$

On portera OA en OG et il suffira de faire passer une circonférence quelconque par H, I, G qui passera également par B.

Soit ω la circonférence passant par O, A, B.

Prenons D milieu de l'arc AB, C milieu de l'arc OB et décrivons de C comme centre une circonférence qui passe par O et B. Prolongeons OD jusqu'en E; je dis tout d'abord que A, C, E sont en ligne droite.

En effet :

$$\widehat{BCE} = 2\widehat{BOE} = 2\widehat{BOD} = \widehat{BOA},$$

$$\widehat{BCA} = 180° - \widehat{BOA}.$$

Menons MN perpendiculaire en A sur ACE. Les deux racines cherchées sont OM et ON.

En effet, A étant le milieu de MN, on a en premier lieu

$$\overline{OM} + \overline{ON} = 2\overline{OA} = p.$$

D'autre part, le quadrilatère AFBE est inscriptible dans un cercle de centre D.

En effet,

$$DB = DA$$

par construction, et comme l'angle $\widehat{A}$ est droit

$$DA = DF.$$

D'ailleurs

$$\widehat{BDO} = \widehat{DBE} + \widehat{BED}$$

et

$$\widehat{BDO} = \widehat{BCO} = 2\widehat{BEO} = 2\widehat{BED},$$

donc

$$\widehat{DBE} = \widehat{BED} \quad \text{et} \quad DB = DE.$$

Comme le diamètre OFDE est la bissectrice commune des angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{HOX}$, $\widehat{MON}$, la circonférence dont nous parlons coupera OB en un point G tel que

$$OG = OA.$$

On aura donc par application du théorème sur la

bissectrice

$$OM.ON = OF.OE = OG.OB = OA.OB,$$

et avec les vecteurs

$$\overline{OM}.\overline{ON} = \overline{OA}.\overline{OB} = q.$$

C. Q. F. D.

Il est aisé de se rendre compte que ACE est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{OAB}$ et que, par suite, MAN est la bissectrice intérieure de ce même angle.

La solution se trouve donc ainsi définie :

Prendre sur la circonférence ω passant par O, A, B le point C milieu de l'arc OAB, décrire de ce point une circonférence passant par O et mener la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{OAB}$ dont l'intersection avec la circonférence C donne les racines $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$.

La solution est toujours possible, sauf le cas particulier où les points O, A, B sont en ligne droite.

Deux cas sont alors à distinguer :

(a). A se trouve sur le vecteur $\overline{OB}$. Dans ce cas la solution ci-dessus reste applicable.

Les racines $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ ont même module et il est aisé de voir que c'est le seul cas où cette circonstance peut se présenter.

(b). A se trouve à l'extérieur du vecteur $\overline{OB}$. Dans ce cas les racines ont même argument ou des arguments différents de π, selon que $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ ont même argument ou des arguments différents de π.

La solution ci-dessus n'est plus applicable, mais on voit immédiatement que pour avoir les racines il suffit

de décrire une circonférence sur OB comme diamètre, de lui mener une tangente AT et de rabattre celle-ci sur la droite OBA suivant

$$AM = AN = AT;$$

les vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ sont alors les racines demandées.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1987.

(1903, p. 576.)

Si les segments aa', bb', cc' sont en involution, ainsi que les segments aa'', bb'', cc'', les points a, b, c auront le même conjugué dans les trois involutions respectivement déterminées par les segments $b'c''$ et $c'b''$, $c'a''$ et $a'c''$, $a'b''$ et $b'a''$. (A. Tissot.)

SOLUTION

Par M. R. B.

On peut supposer que les points a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' appartiennent à une *conique* C. Il résulte de l'énoncé que les droites aa', bb', cc' concourent en un certain point ω, et que les droites aa'', bb'', cc'' concourent en un autre point ω_1. Désignons par p, q les points d'intersection de $\omega\omega_1$ avec C.

Le théorème de Pascal, appliqué à l'hexagone $bb'c''cc'b''$, montre que les couples de droites $(b'c'', c'b'')$, $(c''c, b''b)$, (cc', bb') se coupent respectivement en trois points en ligne droite. Le deuxième et le troisième de ces points sont respectivement ω_1 et ω. Par conséquent, l'involution déterminée par les couples (b', c'') et (c', b'') contient les points d'intersection de $\omega\omega_1$ avec C, c'est-à-dire les points p et q, comme points conjugués.

Soit m le conjugué de a dans cette involution. On a l'éga-

lité entre rapports anharmoniques

$$(mc'pq) = (ab''qp).$$

Mais les points a, b'', q, p ont pour conjugués respectifs, dans l'involution de centre ω_1, a'', b, p, q. Donc

$$(ab''qp) = (a''bpq),$$

et, par suite,

$$(mc'pq) = (a''bpq) = (ba''qp).$$

Cela montre que m et b sont conjugués dans l'involution déterminée par les couples (c', a'') et (p, q). Mais cette involution contient le couple (a', c''). La proposition en vue est donc établie.

2005.

(1905, p. 48.)

On considère en un point M *d'une ellipse les deux normales obliques sous l'angle* α.

1° *Les produits des distances des foyers à chacune de ces normales sont les mêmes.*

2° *La somme de ces produits en deux points conjugués* M *et* M' *de l'ellipse est constante.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Désignons par d_1, d'_1 les distances des foyers F et F' à l'une des normales et par d_2, d'_2 les distances à l'autre normale.

1° La similitude des triangles donne

$$\frac{d_1}{d'_2} = \frac{\text{MF}}{\text{MF}'}, \qquad \frac{d_2}{d'_1} = \frac{\text{MF}}{\text{MF}'};$$

donc

$$d_1 d'_1 = d_2 d'_2.$$

2° Désignons par D, D' les distances des foyers à la bissectrice des normales et par Δ, Δ' leurs distances à la tangente

à l'ellipse au point M. On a facilement

$$d_1 + d_2 = 2\mathrm{D}\cos\alpha, \qquad d_2 - d_1 = 2\Delta\sin\alpha,$$
$$d'_1 + d'_2 = 2\mathrm{D}'\cos\alpha, \qquad d'_1 - d'_2 = 2\Delta'\sin\alpha.$$

Multiplions membre à membre les deux premières relations puis les deux autres et retranchons

$$d_1 d'_1 = \mathrm{DD}'\cos^2\alpha - \Delta\Delta'\sin^2\alpha,$$

or,

$$\Delta\Delta' = b^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{DD}' = c^2\sin^2\varphi,$$

φ étant l'anomalie excentrique du point M.

En M', on a

$$\delta_1\delta'_1 = c^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha;$$

donc

$$d_1 d'_1 + \delta_1\delta'_1 = c^2\cos^2\alpha - 2b^2\sin^2\alpha.$$

Remarque. — On aperçoit d'autres relations telles que

$$(d_2 - d_1)(d'_1 - d'_2) = 4b^2\sin^2\alpha,$$
$$d_2 d'_1 + d_1 d'_2 + \delta_2\delta'_1 + \delta_1\delta'_2 = 2c^2\cos^2\alpha + 4b^2\sin^2\alpha.$$

2013.

(1905, p. 192.)

Un cercle a pour centre le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle donné et il est tangent à l'hypoténuse de ce triangle; les coniques qui ont pour foyers les extrémités de cette hypoténuse, et qui touchent le cercle, ont pour points de contact les sommets d'un triangle équilatéral. (MANNHEIM.)

SOLUTION

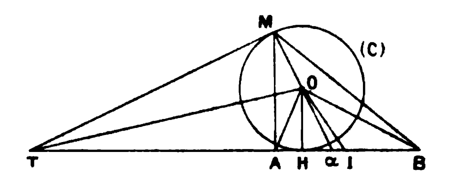
Par M. R. B.

Soient

AOB le triangle donné, rectangle en O;
OH sa hauteur;
(C) le cercle de centre O et de rayon OH;

M le point de contact de (C) et d'une conique ayant pour foyers A et B;
α le point de rencontre de MO et de AB;
I le milieu de AB;
T le point de rencontre de AB et de la tangente à (C) en M.

MO est une bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ (intérieure dans le



cas de la figure); les quatre points T, A, α, B forment donc une division harmonique et l'on a

$$I\alpha . IT = \overline{IA}^2 = \overline{IO}^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{I\alpha}{IO} = \frac{IO}{IT}.$$

Il en résulte que les triangles $I\alpha O$, IOT sont semblables. On a donc

$$\widehat{IO\alpha} = \widehat{ITO} = \frac{\widehat{HTM}}{2} = \frac{\widehat{\alpha OH}}{2},$$

et, par suite,

$$\widehat{IO\alpha} = \frac{\widehat{IOH}}{3}.$$

La droite $O\alpha$ se construira donc par trisection de l'angle $\widehat{IOH}$. Mais ce dernier problème a trois solutions. les droites correspondantes $O\alpha_1$, $O\alpha_2$, $O\alpha_3$ faisant deux à deux des angles de 130°. De là résulte la propriété énoncée.

Remarque. — Le lieu du pied des normales abaissées du point O sur les coniques ayant pour foyers A et B est une strophoïde, dont le point double est O et dont le sommet est H. On peut donc énoncer la proposition suivante, dont la démonstration directe est d'ailleurs bien simple :

Le cercle qui a pour centre le point double d'une stro-

phoïde et qui passe par le sommet de cette courbe la rencontre en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

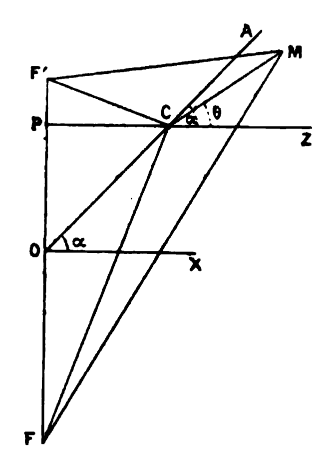
AUTRE SOLUTION

Par M. C.-A. L.

Soient

CFF′ le triangle rectangle;
O le milieu de FF′;
CP la hauteur, rayon du cercle;
α l'angle XOC que forme OCA avec PC;
M l'un des points de contact du cercle avec l'une des coniques.

Il s'agit de trouver un point M tel que CM = PC, et que CM



soit bissectrice de FMF′. Prenons pour unité la longueur

$$OC = OF = OF'.$$

Celle de PC = CM est alors $\cos\alpha$. Si θ est l'angle ZCM de CM avec PC, on a les équipollences

$$F'M = \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\theta}\cos\alpha - i,$$
$$FM = \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\theta}\cos\alpha + i,$$
$$CM = \varepsilon^{\theta}\cos\alpha.$$

La condition à laquelle il faut satisfaire est que F′M . FM soit parallèle à CM^2, ou

$$(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\theta}\cos\alpha)^2 + 1 \parallel \varepsilon^{\theta},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon^{2\alpha} + 1 + 2\varepsilon^{\theta+\alpha}\cos\alpha \parallel \varepsilon^{2\theta}.$$

Mais

$$\varepsilon^{2\alpha} + 1 = \varepsilon^{\alpha}(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}) = 2\varepsilon^{\alpha}\cos\alpha.$$

Il vient donc

$$1 + \varepsilon^{\theta} \parallel \varepsilon^{2\theta-\alpha} \qquad \text{ou} \qquad 2\cos\frac{\theta}{2}\,\varepsilon^{\frac{\theta}{2}} \parallel \varepsilon^{2\theta-\alpha}.$$

On satisfait à cette condition, soit par

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0, \qquad \theta = \pi,$$

ce qui donne pour le point de contact P, correspondant à la conique dégénérée FF′, soit par l'égalité

$$2\theta - \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{2}{3}\alpha, \qquad \theta' = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2\pi}{3}, \qquad \theta'' = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4\pi}{3}.$$

On voit donc que les trois points M forment un triangle équilatéral.

On constate en même temps qu'en formant l'angle

$$ACM = \frac{1}{3}ACZ,$$

on obtient l'une des solutions.

2016.

(1905, p. 240.)

Si l'on considère toutes les loxodromies passant en un point M *d'une sphère et si, pour chacune d'elles, on prend le centre de courbure correspondant au point* M, *le lieu de*

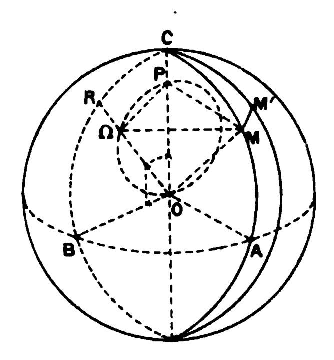
ces centres de courbure est un cercle situé dans le méridien perpendiculaire à celui du point M.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par UN ANONYME.

Soit M un point de la sphère, M′ un point voisin sur une loxodromie. On peut faire coïncider les deux méridiens et sur ces méridiens les points M et M′ par deux rotations, autour de OC, et de OB (perpendiculaire au méridien). Il est clair



que les tangentes en M et M′ viendront ainsi en coïncidence, et par suite les plans normaux.

Je veux démontrer que la caractéristique du plan normal est dans le plan COB.

Les deux rotations se réduisent à une seule autour d'un axe OΩ situé dans le plan BOC. Cet axe étant perpendiculaire à MM′ et passant par O est contenu dans le plan normal. Il en est donc la caractéristique.

Le centre de courbure se trouve sur le cercle décrit sur OP comme diamètre, P étant la projection de M, OΩ étant la trace du plan normal est perpendiculaire à la projection de la tangente en M. Cette projection est donc ΩP. Le cercle osculateur est le cercle de section de la sphère par le plan PΩM.

La réciproque de la proposition est vraie. Toute famille de courbes jouissant de la propriété est du genre loxodromie dans le voisinage du point M.

On peut rattacher le problème à une question de Géométrie plane. Prenons la figure inverse par rapport au point C. Les loxodromies demeurent des spirales logarithmiques. Le cercle osculateur à ces spirales est la transformée du cercle de centre Ω dont le plan est perpendiculaire au plan COB. Il a donc son centre dans ce plan, et l'on voit que toutes les spirales passant par un point du plan ont leur centre de courbure en ligne droite, à 90° du rayon vecteur.

Il était d'ailleurs facile de le voir directement et de remonter à la propriété des loxodromies.

En général, à une famille de courbes passant par M correspond une courbe tracée sur la sphère de diamètre OM qui est le lieu du cercle osculateur. Il n'y a que pour les loxodromies que cette courbe soit plane. Il suffit pour le voir de changer les pôles de la sphère; le point P restant toujours la projection de M sur le plan, et la ligne des pôles passant par P.

Autre solution de M. Parrod.

2017.

(1905, p. 240.)

Si une cubique gauche et une quadrique admettent un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique, on sait qu'elles en admettent une infinité. Démontrer que le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une cubique gauche. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Supposons la cubique représentée en coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = \frac{A(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$y = \frac{B(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$z = \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)},$$

les polynomes en λ étant du troisième degré. Soit D un point

de la cubique; son plan polaire par rapport à la quadrique coupe la cubique en trois points A, B, C, qui forment avec D un tétraèdre de l'espèce indiquée. Les valeurs de λ aux points A, B, C, D étant α, β, γ, δ, on a entre α et δ une relation de la forme

$$\alpha^3 f(\delta) + \alpha^2 \varphi(\delta) + \ldots = 0,$$

les polynomes f, φ, ... étant du troisième degré, et, si δ est donné, on a une équation en α dont les racines sont α, β, γ.

Les coordonnées des points A, B, C étant (x', y', z'), (x'', y'', z''), ..., on a

$$\begin{aligned} x' + x'' + x''' &= \frac{A(\alpha)}{D(\alpha)} + \frac{A(\beta)}{D(\beta)} + \frac{A(\gamma)}{D(\gamma)} \\ &= \frac{A(\alpha)\,D(\beta)\,C(\gamma) + \ldots}{D(\alpha)\,D(\beta)\,D(\gamma)} \\ &= \frac{F(\delta)}{\Phi(\delta)}, \end{aligned}$$

F et Φ étant du neuvième degré. On en conclut pour les coordonnées du centre de gravité G

$$(1) \qquad x = \frac{R(\delta)}{V(\delta)}, \qquad y = \frac{S(\delta)}{V(\delta)}, \qquad \ldots,$$

les polynomes en δ étant du douzième degré. Les points G situés dans un plan donné correspondent donc à des points D en nombre égal à 12, à des tétraèdres en nombre égal à 3, de sorte qu'il y a trois points G dans un plan quelconque; le lieu du point G est dès lors une cubique gauche.

[Si k est un paramètre qui correspond uniformément au point G sur la cubique qu'il décrit, les valeurs de λ aux points A, B, C, D sont données par une équation de la forme

$$M(\lambda) + k\,N(\lambda) = 0,$$

M et N étant du quatrième degré. Comme on a pour les coordonnées du point G

$$x = \frac{r(k)}{v(k)}, \qquad y = \frac{s(k)}{v(k)}, \qquad \ldots,$$

les polynomes en k étant du troisième degré, on voit que l'on obtiendrait les formules (1), avec λ au lieu de δ, en substituant à k son expression en λ.]

2018.

(1905, p. 240.)

Soit $P^{(m)}$ *une parabole générale d'ordre m*

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m.$$

Si, sur la parabole $P^{(2n)}$, *on prend les points* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *dont les abscisses croissent en progression arithmétique et si l'on fait passer par ces points une* $P^{(2n+1)}$ *quelconque, l'aire comprise entre ces deux courbes depuis le point* A_0 *jusqu'au point* A_{2n} *est algébriquement nulle.*

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Si l'on désigne par h l'abscisse du point A_0, l'équation générale des paraboles $P^{(2n+1)}$, satisfaisant aux conditions de l'énoncé, est

$$Y = y + a(x-h)(x-2h)\ldots[x-(2n+1)h],$$

a étant un paramètre et $y = 0$ l'équation de la parabole $P^{(2n)}$ considérée.

Il faut donc démontrer que l'intégrale définie

$$I = \int_h^{(2n+1)h} (Y-y)\,dx$$

$$= a\int_h^{(2n+1)h} (x-h)(x-2h)\ldots[x-(2n+1)h]\,dx$$

est nulle.

Posons

$$x = h[(n+1)+z],$$

z étant une nouvelle variable, I s'écrit

$$I = ah^{2(n+1)}\int_{-n}^{+n} z(z^2-1)(z^2-4)\ldots(z^2-n^2)\,dz.$$

Pour des valeurs de x égales et de signe contraire, le polynome sous le signe $\int$ prenant des valeurs égales et de signes contraires, on en conclut que l'intégrale I est nulle. Ce qui démontre la proposition.

Autre solution par M. Parrod.

QUESTIONS.

2025. On donne quatre points quelconques sur un plan. On prend deux triangles ayant pour côté commun le segment compris entre deux de ces points et respectivement pour sommet opposé à ce côté l'un des autres points donnés. Chacun de ces triangles donne lieu à une droite qui joint les pieds des hauteurs issues des extrémités du côté commun. Par le point de rencontre des deux droites ainsi obtenues et par le milieu du côté commun, on mène une droite : les six droites, qu'on construit ainsi en changeant le côté commun, passent par un même point. (*Canon.*)

2026. Considérons une courbe plane du quatrième ordre avec un seul point double D : on sait que les six points de contact des tangentes menées à la courbe par le point double tombent sur une conique, et les points de contact A, B de cette conique avec ses tangentes issues de D appartiennent à la quartique.

Cela posé, démontrer que, si l'on mène par les deux points A, B une conique arbitraire qui coupera la quartique en six autres points, les droites qui unissent ces points à D coupent ultérieurement la quartique en six points d'une conique. (V. Retali.)

HOUEL (J.), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Sur le calcul des équipollences**; méthode d'Analyse géométrique de Bellavitis. In-8; 1869 .... 1 fr. 50 c.

LAURENT (H.), Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique et ancien Élève de cette École. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. Revu et mis en harmonie avec les derniers programmes, par *Marchand*, ancien Élève de l'École Polytechnique. 4 volumes in-8.

Ire PARTIE. — *Algèbre élémentaire*, à l'usage des Classes de Mathématiques élémentaires. 4e édition; 1887 .... 4 fr.

IIe PARTIE. — *Analyse algébrique*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894 .... 4 fr.

IIIe PARTIE. — *Théorie des équations*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894 .... 4 fr.

IVe PARTIE. — COMPLÉMENTS : *Théorie des polynomes à plusieurs variables*; 1894 .... 1 fr. 50 c.

LUCAS (Édouard), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques**. 4 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titres en deux couleurs, se vendant séparément :

TOME I. — *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La Numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.* 2e édition; 1891. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

TOME II. — *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-tête. — Les Jeux de demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton.* 2e édition; 1896. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

TOME III. — *Le Calcul digital. — Machines arithmétiques. — Le Caméléon. — Les Jonctions de points. — Le Jeu militaire. — La Prise de la Bastille. — La Patte d'oie. — Le Fer à cheval. — Le Jeu américain. — Amusements par les jetons. — L'Étoile nationale. — Rouge et Noire*; 1893. Prix : Papier hollande, 9 fr. 50. — Vélin, 6 fr. 50.

TOME IV ET DERNIER. — *Le Calendrier perpétuel. — L'Arithmétique en boules. — L'Arithmétique en bâtons. — Les Mérelles au XIIIe siècle. — Les Carrés magiques de Fermat. — Les réseaux et les dominos. — Les régions et les quatre couleurs. — La Machine à marcher.* — Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

STIELTJES. — Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. BAILLAUD, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. BOURGET, Maître de Conférences à l'Université, Astronome adjoint à l'Observatoire de Toulouse, avec une Préface de E. PICARD, Membre de l'Institut. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

TOME I (1882 à 1889). Volume de XX-477 pages avec deux portraits; 1905 .... 16 fr.

TOME II (1889 à 1894). Volume de VI-457 pages avec un portrait et un fac-similé; 1905 .... 16 fr.

TABLE DES MATIÈRES.

Novembre 1905.

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME V.

(64e VOLUME DE LA COLLECTION.)

DÉCEMBRE 1905.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris :
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Baire. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

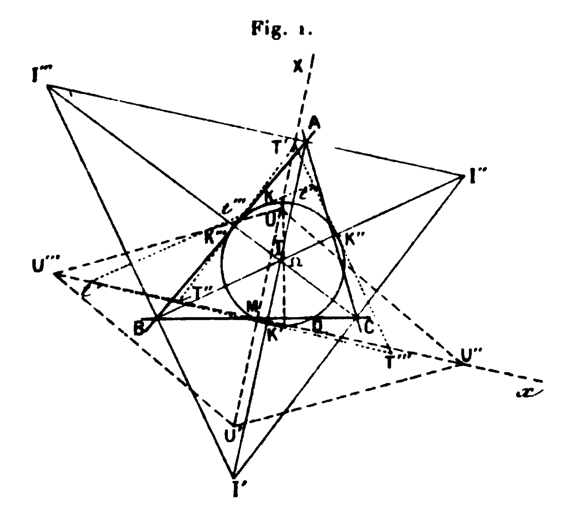
[K2o]

SUR LES POINTS DE CONTACT DU CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE AVEC LES CERCLES TANGENTS AUX TROIS CÔTÉS;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons (*fig.* 1) un triangle ABC et son

Fig. 1.



cercle des neuf points (centre Ω) passant par les milieux M, N, P des côtés. Soient K, K′, K″, K‴ les points de contact de ce cercle avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle (centres I, I′, I″, I‴). Le point K, par exemple, est le point commun aux cercles des neuf points des triangles IBC, ICA, IAB; ce fait, qui résulte de la démonstration du théorème de Feuerbach donnée à la page 260 de ce Volume, a été signalé

d'abord par M. Ch. Michel (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques*, 9[e] année, p. 208), en partant d'une construction du point K donnée par M. Mannheim. Considérons le point K comme le second point d'intersection du cercle Ω avec le cercle des neuf points du triangle IBC, et cherchons le diamètre MU de ce dernier cercle. La tangente en M est parallèle à la tangente en I du cercle IBC, laquelle fait avec BC un angle ayant pour valeur $\frac{C-B}{2}$, de sorte que le diamètre MU fait avec la hauteur du triangle ABC un angle ayant cette même valeur; ce diamètre est parallèle à I'I et est, par suite, dirigé suivant la bissectrice de l'angle NMP. Il est d'ailleurs égal à la moitié de I'I.

Des faits analogues ayant lieu pour les cercles exinscrits, on a ce théorème :

Si, sur les bissectrices MX *et* Mx *des angles intérieur et extérieur en* M *du triangle* MNP, *on prend*

$$MU = MU' = \frac{II'}{2}, \qquad MU'' = MU''' = \frac{I''I'''}{2},$$

on a les diamètres de quatre circonférences qui rencontrent encore la circonférence Ω *aux points* K, K', K'', K'''.

Le milieu de II' étant sur la perpendiculaire à BC menée en M, *les directions* IU, I'U' *sont perpendiculaires à* BC; le cercle de diamètre MU, par exemple, passe bien au pied de la hauteur issue de I dans le triangle IBC. Une remarque analogue s'applique à I''I'''.

2. On a, en outre, dans le quadrangle orthogonal II'I''I''',

$$\overline{II'}^2 + \overline{I''I'''}^2 = 4R_1^2,$$

R_1 étant le rayon du cercle I′I″I‴, par exemple ; on a donc, en divisant par 4,

$$\overline{MU}^2 + \overline{MU''}^2 = 4R^2,$$

R étant le rayon du cercle ABC, ou enfin

(1) $$UU'' = 2R = 2d,$$

d étant le diamètre du cercle Ω.

Or, sur le cercle des neuf points d'un triangle ABC, les points de contact K, K′, K″, K‴ de ce cercle avec les cercles tangents aux trois côtés ne sont pas quelconques : ils sont liés par une relation, puisque la figure formée par quatre points sur un cercle dépend de sept paramètres qui doivent ici se réduire aux six paramètres du triangle. Comme la figure formée par un losange UU″U′U‴ et un cercle Ω de diamètre $\frac{UU''}{2}$, passant au point de rencontre M des diagonales, dépend de six paramètres, on a ce théorème :

Étant donné un losange dont les diagonales UU′ *et* U″U‴ *se coupent en* M, *on mène par* M *un cercle* Ω *dont le diamètre est égal à la moitié du côté du losange ; les cercles décrits sur* MU, MU′, ... *comme diamètres rencontrent le premier cercle en des points* K, K′, K″, K‴ *qui sont les points de contact de ce cercle, considéré comme cercle des neuf points d'un certain triangle* ABC, *avec les cercles tangents aux trois côtés de ce triangle.*

On peut construire le triangle ABC. En premier lieu, les droites MX, Mx qui portent les diagonales du losange sont les bissectrices en M pour le triangle MNP ; si donc X_0 et x_0 sont les seconds points où ces droites rencontrent la circonférence Ω, le diamètre X_0x_0 du cercle Ω est perpendiculaire à NP, par suite à BC ; on

peut alors tracer la droite BC par le point M ; le second point de rencontre de cette droite avec la circonférence Ω est le pied D de la hauteur AD du triangle ABC, et l'on peut tracer par D la droite qui porte cette hauteur : c'est un premier lieu du point A. D'autre part, les côtés de l'angle A du triangle sont perpendiculaires aux côtés du losange, en vertu de la relation

$$\operatorname{tang} MU''U = \frac{MU}{MU''} = \frac{II'}{I''I'''} = \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \operatorname{tang} IAB.$$

Les directions des côtés du triangle ABC étant connues, celle de la médiane MA l'est également, et l'on peut tracer par M la droite qui porte cette médiane : c'est un second lieu du point A. On obtient donc le point A et, par suite, le triangle.

3. Considérons une circonférence Ω, un point M de cette circonférence et une droite Mx passant en M; prenons sur cette droite les segments égaux MU″, MU‴, et sur ces segments, comme diamètres, décrivons deux circonférences qui déterminent sur la première les points K″ et K‴. Si l'on fait varier la longueur MU″, il y a involution entre les droites MK″, MK‴, et les rayons doubles sont la tangente en M au cercle Ω et la perpendiculaire MX à Mx. On a donc ce théorème :

Les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés étant K, K′, K″, K‴, *si* M, N, P *sont les milieux des côtés, la tangente en* M *à ce cercle a pour conjuguée par rapport aux droites* MK″, MK‴ *la bissectrice* MX *de l'angle* M *du triangle* MNP, *et pour conjuguées par rapport aux droites* MK, MK′ *la bissectrice* Mx *de l'angle extérieur en* M *de ce même triangle.*

Si X_0 et x_0 sont les points où les bissectrices en question rencontrent encore le cercle Ω, les points K'' et K''' forment avec les points M et X_0 une division harmonique sur le cercle des neuf points; de même, les points K et K' forment avec les points M et x_0 une division harmonique. Les cordes $K''K'''$ et MX_0 sont donc conjuguées par rapport à ce cercle, ainsi que les cordes KK' et Mx_0. On a ce théorème :

Si T', T'', T''', t', t'', t''' *sont les sommets du quadrilatère complet formé par les tangentes au cercle* Ω, *aux points* K, K', K'', K''', *le point* T', *pôle de la corde* $K''K'''$, *et le point* t', *pôle de la corde* KK', *sont sur les bissectrices* MX *et* Mx *des angles intérieur et extérieur en* M *du triangle* MNP.

On remarquera l'angle droit $T'Mt'$.

4. Soit ABCH un quadrangle orthogonal, c'est-à-dire un quadrangle dans lequel les côtés opposés HA et BC, ... sont rectangulaires. Si D, E, F sont les points d'intersection des côtés opposés, le cercle DEF passe par les milieux des six côtés du quadrangle. Ce cercle Ω est le cercle des neuf points de chacun des quatre triangles ABC, HBC, HCA, HAB; il est donc tangent aux seize cercles qui touchent les trois côtés de l'un ou l'autre de ces triangles.

Le quadrilatère AEHF étant inscriptible, les bissectrices en A pour le triangle ABC, et les bissectrices en H pour le triangle HBC, sont parallèles; si M, N, P, M', N' P' sont les milieux des segments BC, CA, AB, HA, HB, HC, les bissectrices en M sont donc les mêmes pour les deux triangles MNP et $MN'P'$, comme on le verrait d'ailleurs en considérant les seconds points de rencontre X_0 et x_0 de ces bissectrices avec le cercle Ω.

Si donc on désigne par K_1, K'_1, K''_1, K'''_1 les points de contact du centre Ω avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle HBC, les droites MX et Mx, qui contiennent déjà les points T′ et t', contiennent également les points analogues T'_1 et t'_1. *Les six points milieux* M, N, P, M′, N′, P′ *donnent lieu à douze bissectrices dont chacune contient deux des vingt-quatre sommets des quatre quadrilatères complets* (T, t), (T_1, t_1), ...

5. Prenons comme axes de coordonnées les droites Mx et MX. Le demi-angle en U″ du losange étant $\frac{A}{2}$ ou α, on a, pour les équations des cercles décrits sur MU et MU′ comme diamètres,

$$x^2 + y^2 - 2d\sin\alpha . y = 0,$$
$$x^2 - y^2 + 2d\sin\alpha . y = 0;$$

si l'on désigne par θ l'angle $\frac{C-B}{2}$, le cercle des neuf points a pour équation

$$x^2 + y^2 - d\sin\theta . x - d\cos\theta . y = 0.$$

Les équations des cordes communes MK, MK′ sont donc

$$x\sin\theta + y\cos\theta = \quad 2y\sin\alpha,$$
$$x\sin\theta + y\cos\theta = -2y\sin\alpha;$$

les coefficients angulaires de ces droites sont

$$m = \frac{\sin\theta}{2\sin\alpha - \cos\theta}, \qquad m' = \frac{-\sin\theta}{2\sin\alpha + \cos\theta},$$

et l'on a

$$\operatorname{tang}(MK, MK') = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$
$$= \frac{-4\sin\alpha\sin\theta}{4\sin^2\alpha - 1} = \frac{2\sin\alpha\sin\theta}{\cos 2\alpha - \frac{1}{2}}.$$

On a un calcul analogue pour K'' et K'''; il faut échanger x et y, remplacer α et θ par leurs compléments, et regarder m et m' comme des coefficients angulaires relatifs au système d'axes Oy, Ox, de sorte que le signe de l'angle (MK'', MK''') est changé; en prenant ce signe dans le système d'axes Ox, Oy, on a donc

$$\operatorname{tang}(MK'', MK''') = \frac{2\cos\alpha\cos\theta}{\cos 2\alpha + \frac{1}{2}}.$$

Ainsi, le plan étant orienté dans le sens ABC, si S est un point quelconque de la circonférence des neuf points, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} KSK' = \frac{\sin B - \sin C}{\frac{1}{2} - \cos A}, \qquad \operatorname{tang} K''SK''' = \frac{\sin B + \sin C}{\frac{1}{2} + \cos A},\\
&\operatorname{tang} KSK'' = \frac{\sin C - \sin A}{\frac{1}{2} - \cos B}, \qquad \operatorname{tang} K'''SK' = \frac{\sin C + \sin A}{\frac{1}{2} + \cos B},\\
&\operatorname{tang} KSK''' = \frac{\sin A - \sin B}{\frac{1}{2} - \cos C}, \qquad \operatorname{tang} K'SK'' = \frac{\sin A + \sin B}{\frac{1}{2} + \cos C},\\
&\qquad A + B + C = \pi;
\end{aligned}\right.$$

les six premières relations forment seulement trois relations distinctes.

Si, au lieu de se régler sur le point K, on se règle sur le point K' en désignant les points K', K, K''', K'' par les lettres k, k', k'', k''', et en posant

$$A' = A, \qquad B' = B + \pi, \qquad C' = C + \pi,$$

on a

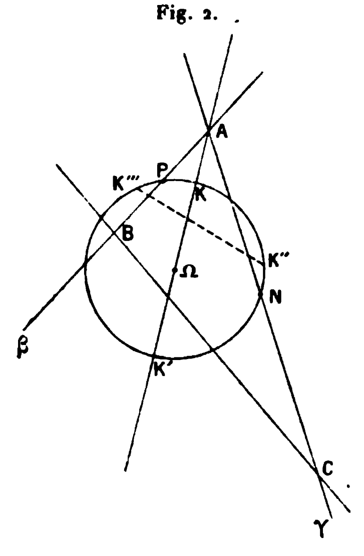
$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} kSk' = \frac{\sin B' - \sin C'}{\frac{1}{2} - \cos A'}, \qquad \operatorname{tang} k''Sk''' = \frac{\sin B' + \sin C'}{\frac{1}{2} + \cos A'},\\
&\operatorname{tang} kSk'' = \frac{\sin C' - \sin A'}{\frac{1}{2} - \cos B'}, \qquad \operatorname{tang} k'''Sk' = \frac{\sin C' + \sin A'}{\frac{1}{2} + \cos B'},\\
&\operatorname{tang} kSk''' = \frac{\sin A' - \sin B'}{\frac{1}{2} - \cos C'}, \qquad \operatorname{tang} k'Sk'' = \frac{\sin A' + \sin B'}{\frac{1}{2} + \cos C'},\\
&\qquad A' + B' + C' = 3\pi.
\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, quatre points K, K′, K″, K‴ *situés sur un cercle sont les points de contact de ce cercle, considéré comme cercle des neuf points d'un triangle, avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle, si l'on peut trouver trois angles* A, B, C *vérifiant, par exemple, les trois premières des relations* (1), *où entre le point* K, *et satisfaisant à la condition*

$$A + B + C = (2k + 1)\pi.$$

6. *Soient deux droites infinies* β *et* γ (*fig.* 2) *qui*

Fig. 2.



se coupent en A *sous des angles de* 60° *et de* 120°. *Si une troisième droite détermine avec les deux premières un triangle* ABC, *dont l'angle* A *peut avoir* 60° *ou* 120°, *le cercle des neuf points de ce triangle a son centre* Ω *sur la bissectrice de l'angle de* 60° (*angle intérieur ou angle extérieur*) ([1]).

([1]) Si les hauteurs BE, CF se coupent en H, on a aussi en H un angle de 60° dont la bissectrice contient le point Ω.

Les deux cercles tangents aux trois côtés du triangle, qui ont leurs centres sur cette bissectrice, touchent le cercle des neuf points aux extrémités K, K′ ou K″, K‴ du diamètre de ce cercle porté par cette bissectrice, et ce fait est d'accord avec les formules (1) qui donnent alors pour tang KSK′ ou tang K″SK‴ une valeur infinie.

Si l'on se donne le cercle Ω, *avec le diamètre* KK′ (*ou* K″K‴), en prenant un point quelconque A sur la droite qui porte ce diamètre et en menant par ce point deux droites β et γ faisant avec la droite KK′ des angles de 30°, il suffit de prendre sur β et γ deux segments AB et AC qui aient leurs milieux sur le cercle Ω sans être égaux, pour former un triangle ABC admettant le cercle Ω comme cercle des neuf points. Selon que le point A est pris en dehors du segment KK′ ou à l'intérieur de ce segment, l'angle en A qui a pour bissectrice la droite KK′ est l'angle intérieur ou l'angle extérieur en A du triangle ABC. Les points K, K′ (ou K″, K‴) sont les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle et qui ont leurs centres sur la bissectrice AKK′; restent deux autres points de contact que nous appellerons K″, K‴, même dans le cas où il conviendrait de les nommer K, K′. Si l'on pose

$$\text{tang}\,\text{KMK}'' = x, \qquad \text{tang}\,\text{KMK}''' = y,$$

les formules (1) donnent

$$xy\sqrt{3} - 2(x - y) - \sqrt{3} = 0;$$

si l'on fait $x = y$, on a

$$x = y = \pm 1;$$

on a encore la solution

$$x = -\sqrt{3}, \qquad y = \sqrt{3}.$$

L'enveloppe de la corde $K''K'''$ *est une ellipse doublement tangente au cercle* Ω; *la corde des contacts est le diamètre de ce cercle perpendiculaire à* KK' : *c'est un axe de la conique; l'autre axe est la moitié du premier.*

7. Ce qui précède conduit à chercher l'angle $(AI, A\Omega)$; on trouve

$$\frac{\operatorname{tang}(AI, A\Omega)}{\operatorname{tang}\frac{B-C}{2}} = \operatorname{tang}\frac{A-60}{2}\operatorname{tang}\frac{A+60}{2}.$$

[D1b]

SUR DEUX SUITES REMARQUABLES DE POLYNOMES ET DE COURBES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Weierstrass a démontré que toute fonction $f(x)$ continue entre o et 1 peut être considérée comme la limite uniforme d'une suite infinie de polynomes de degrés croissants :

$$f(x) = \lim_{n=\infty}(a_0^n + \ldots + a_n^n x^n).$$

On peut, si l'on veut, s'arranger pour que les coefficients de ces polynomes soient des nombres rationnels. En effet, remplaçons en général a_p^n par $\frac{\alpha_p^n}{n 2^p}$, α_p^n étant la partie entière du nombre $n.2^p.a_p^n$. L'erreur commise sur le polynome de rang n sera moindre en

valeur absolue que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\frac{x}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^p+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$<\frac{1}{n}\left[1+\frac{x}{2}+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right).$$

Et, comme x est compris entre o et 1, l'erreur est plus petite que $\frac{2}{n}$. Par suite, cette erreur tend vers zéro quand n croît indéfiniment, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha_0^n}{n}+\ldots+\frac{\alpha_n^n}{n2^n}x^n\right) \\ &= \lim_{n=\infty}\frac{\beta_0^n+\ldots+\beta_n^n x^n}{n2^n} \\ &= \lim_{n=\infty} R_n(x), \end{aligned}$$

la convergence étant uniforme.

On voit qu'*à chaque* fonction continue $f(x)$, on peut faire correspondre une certaine suite de polynomes $R_1, R_2, \ldots$. Je dis qu'on peut tirer tous ces polynomes R_n d'une même suite de polynomes $S_1, S_2, \ldots$ *indépendante de la fonction* $f(x)$. Cela est évident d'après la théorie des ensembles dénombrables, mais il est bien facile de le démontrer directement. En effet, prenons d'abord tous les polynomes R_n qui correspondent à la même valeur de n. Chacun d'eux est déterminé par les n nombres entiers $\beta_0^n, \ldots, \beta_n^n$, et il y en a seulement un nombre fini qui soient tels que la somme

$$s = |\beta_0^n| + \ldots + |\beta_n^n|$$

soit inférieure à un nombre donné quelconque. Nous pourrons alors numéroter (dans un ordre quelconque) tous les polynomes R_n tels que l'on ait $s = 1$, puis nu-

méroter à la suite ceux pour lesquels $s = 2$, ... On arrivera ainsi à ranger tous les polynomes R_n correspondant à la même valeur de n en une suite :

$$Q_n^1, \quad Q_n^2, \quad \ldots, \quad Q_n^p, \quad \ldots.$$

Mais, maintenant, numérotons avec un seul indice tous les polynomes Q_n^p tels que $n + p$ soit inférieur à 2, 3, ... On arrivera finalement à une suite de polynomes à coefficients rationnels

$$S_1(x), \quad S_2(x), \quad \ldots, \quad S_q(x), \quad \ldots$$

qui comprend tous les polynomes R_n possibles.

Ainsi, *il existe une suite énumérable* (Σ) *de polynomes* $S_1, S_2, \ldots$ *qui jouit de la propriété suivante :*

Toute fonction $f(x)$ *continue entre* 0 *et* 1 *est la limite uniforme d'une suite de polynomes convenablement extraite de la suite* (Σ).

Autrement dit, on peut écrire :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} S_{q_n}(x),$$

en désignant par $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ une suite [variant avec $f(x)$] de nombres entiers croissants [1].

On peut énoncer la même proposition sous une autre forme. Posons

$$P_1(x) = S_1(x), \qquad P_q(x) = S_q(x) - S_{q-1}(x),$$

et considérons la série

$$(T) \qquad P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots$$

---

[1] On a ainsi une preuve effective de ce fait connu que toute fonction continue peut être définie par une suite infinie de nombres entiers.

Si l'on groupe ainsi

$$(P_1 + \ldots + P_{q_1}) + (P_{q_1+1} + \ldots + P_{q_2}) + \ldots$$
$$+ (P_{q_{n-1}+1} + \ldots + P_{q_n}) + \ldots$$

les termes de la série T, on obtient précisément une série dont la somme des n premiers termes est S_{q_n} quel que soit n.

Donc, *il existe une série* T *dont tous les termes sont des polynomes choisis une fois pour toutes et qu'on peut faire converger uniformément vers n'importe quelle fonction continue entre* 0 *et* 1, *en groupant à chaque fois de façon convenable les termes de cette série.*

Application aux courbes continues. — Une courbe continue est une courbe C qui peut être représentée par des formules telles que

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

f, g, h étant trois fonctions continues de 0 à 1.

On dit qu'une courbe continue C_n

$$x = f_n(t), \qquad y = g_n(t), \qquad z = h_n(t)$$

tend vers la courbe C quand n croît indéfiniment si

$$|f - f_n|, \quad |g - g_n|, \quad |h - h_n|$$

tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Ceci étant, considérons les courbes unicursales $C_{p,q,r}$:

$$x = S_p(t), \qquad y = S_q(t), \qquad z = S_r(t);$$

les fonctions S_p, S_q, S_r étant trois quelconques des polynomes définis plus haut.

Quelle que soit la courbe C, on peut écrire des égalités de la forme

$$f(t) = \lim_{n=\infty} S_{p_n}(t),$$

$$g(t) = \lim_{n=\infty} S_{q_n}(t),$$

$$h(t) = \lim_{n=\infty} S_{r_n}(t).$$

Autrement dit, la courbe C est la limite d'une suite infinie de courbes

$$C_{p_1, q_1, r_1}, \quad C_{p_2, q_2, r_2}, \quad \ldots, \quad C_{p_n, q_n, r_n}, \quad \ldots.$$

Mais, en employant la même méthode que pour les polynomes Q_n^p, on peut ranger toutes les courbes $C_{p,q,r}$ en une seule suite

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n, \quad \ldots.$$

Donc :

On peut former une suite infinie de courbes unicursales $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ *jouissant de la propriété suivante :*

Toute courbe continue est la limite d'une suite infinie de courbes

$$\Gamma_{m_1}, \quad \Gamma_{m_2}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{m_n}, \quad \ldots,$$

convenablement extraite de la suite primitive

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots.$$

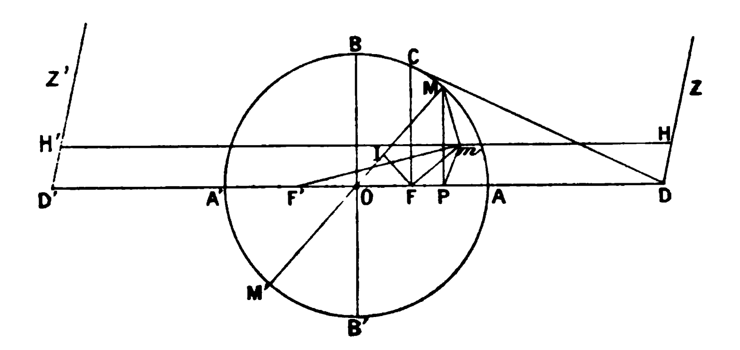
[L'1e]

SUR LA PROJECTION ORTHOGONALE D'UN CERCLE;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Nous nous proposons d'établir que la démonstration, si simple et si élégante de M. Courcelles, relative à la projection orthogonale d'un cercle et reproduite dans tous les Traités de Géométrie, met en évidence, et avec la même facilité, non seulement les *foyers*, ainsi que l'a montré M. Courcelles, mais encore les *directrices* de l'ellipse et leur propriété caractéristique de polaires des foyers.

Soit O le centre du cercle qui se projette orthogo-



nalement suivant l'ellipse ayant pour foyers F et F' et pour grand axe AA'. Menons l'ordonnée FC du point F et la tangente en C à la circonférence qui coupe AA' en D; par le point D, dans le plan de l'ellipse, traçons DZ perpendiculaire à AA' et, par le point D' symétrique de E par rapport à O, D'Z' parallèle à DZ.

Soient

M un point de la circonférence;
m sa projection orthogonale;
mP perpendiculaire sur AA′;
H′mH parallèle à AA′;
M′ symétrique de M par rapport à O;
FI perpendiculaire sur MM′.

On sait que

$$mF = MI \qquad \text{et} \qquad mF' = M'I.$$

Ceci dit, on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 = OF \times OD,$$

d'où

$$\frac{OM}{OD} = \frac{OF}{OM} = \frac{c}{a}.$$

Or

$$\frac{OF}{OM} = \frac{OI}{OP},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} = \frac{OM}{OD} = \frac{OI}{OP} &= \frac{OM - OI}{OD - OP} = \frac{MI}{PD} \\ &= \frac{mF}{mH} = \frac{OM + OI}{OD + OP} = \frac{M'I}{PD'} = \frac{mF'}{mH'}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{mF}{mH} = \frac{mF'}{mH'} = \frac{c}{a}.$$

Les droites DZ et D′Z′ sont les directrices de l'ellipse.

Il existe donc un rapport constant, plus petit que 1, entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice correspondante.

On voit de plus que, CF étant la polaire du point D, la directrice est la polaire du foyer.

[M¹5gα]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA STROPHOÏDE;

PAR M. V. RETALI.

La proposition relative à la strophoïde que M. V. Jamet a démontrée géométriquement dans un numéro récent de ce Journal (1905, p. 411-413), en considérant la strophoïde comme podaire de parabole, est susceptible d'une démonstration géométrique immédiate et très simple si l'on prend pour définition de la strophoïde sa propriété caractéristique d'avoir les points circulaires à l'infini pour un couple de points conjugués, c'est-à-dire tels que les tangentes en ces points vont se couper sur la courbe. En effet, les couples de rayons issus du point double et également inclinés sur les tangentes en ce point marquent sur la cubique une involution quadratique de points dont les points doubles sont les points *consécutifs* (*Nachbarpunkte* des Allemands) du point double de la cubique. Cette involution est donc l'*involution de points conjugués* (involution quadratique absolue) et l'enveloppe des droites qui unissent deux points conjugués est, d'après un théorème bien connu, une conique (cayleyenne de la cubique) qui touche la cubique aux trois points où elle est touchée par les tangentes issues des points d'inflexion, et qui est aussi tangente aux tangentes de la cubique en son point double. Dans le cas particulier de la strophoïde, comme les points circulaires à l'infini forment sur elle un couple de points conjugués, la cayleyenne est une parabole, dont la directrice passe par le point double, et qui est

tangente à la strophoïde en trois points, dont un, réel, est le sommet (foyer double) de la courbe et les deux autres, imaginaires conjugués, ont pour tangentiels les deux points d'inflexion imaginaires.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1905;

PAR M. PIERRE SICARD,
Lieutenant au 35ᵉ d'Artillerie.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *étant écrite sous la forme*

$$ux + vy + wz = h$$

et les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \cot\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ *et* φ *désignent deux paramètres arbitraires et* $f(\theta, \varphi)$ *une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface* S *en coordonnées tangentielles.*

I. *Démontrer que, si l'on considère sur la surface* S *les deux systèmes de courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que* $f(\theta, \varphi)$ *soit de la forme*

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α *étant fonction de* θ *seul et* β *fonction de* φ *seul. Dans toute la suite de l'énoncé on supposera que* $f(\theta, \varphi)$ *est de cette forme.*

II. *Montrer que les courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$

sont alors les lignes de courbure de la surface S *et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de* θ *et de* φ, *les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface* S.

III. *De ces deux rayons, l'un* R_1 *est fonction de* θ *seulement; l'autre* R_2 *dépend en général à la fois de* θ *et de* φ. *Quelle forme doit avoir* $f(\theta, \varphi)$ *pour que* R_2 *soit aussi indépendant de* φ? *Montrer que, dans ce cas, la surface* S *est de révolution autour d'un axe parallèle à* Oz.

IV. *Établir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction* $f(\theta, \varphi)$ *de manière à avoir*

$$R_1 = l \tang\theta, \qquad R_2 = -l \cot\theta,$$

R_1 *et* R_2 *étant, suivant l'usage, affectés d'un signe, et* l *désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.*

V. *Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre* θ *et* φ *qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface* S *et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ces points.*

1. La condition nécessaire et suffisante pour que le système des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ soit conjugué est, comme l'on sait, que les coordonnées tangentielles u, v, w, h satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\, d\theta} + A\frac{\partial H}{\partial\varphi} + B\frac{\partial H}{\partial\theta} + CH = 0.$$

Dans le cas actuel, les trois coordonnées u, v, w satisfont visiblement à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\, \partial\theta} = 0;$$

h devant y satisfaire également est nécessairement de la forme $\alpha + \beta$, $h = \alpha + \beta$, α étant fonction de θ seul et β étant fonction de φ seul. C. Q. F. D.

2. Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface (S) sont définies par l'équation

$$(1) \qquad \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + \cot\theta\, z = \alpha + \beta$$

et par les deux équations

$$(2) \qquad -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y = \frac{d\beta}{d\varphi},$$

$$(3) \qquad -\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta},$$

obtenues en dérivant successivement l'équation (1) par rapport aux paramètres φ et θ qui entrent dans les coefficients. Nous lisons immédiatement sur les équations (2) et (3) que les courbes $\varphi =$ const. et $\theta =$ const. sont respectivement les premières dans des *plans* parallèles à Oz, les secondes dans des *plans* perpendiculaires à Oz. Ces courbes, *conjuguées* et *orthogonales* à la fois, sont nécessairement des *lignes de courbure* de la surface S. Ce résultat aurait pu aussi être mis en évidence en remarquant que $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ satisfait également à la même équation réduite que u, v, w, et h à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\, \partial\theta} = 0.$$

3. Les rayons de courbure R_1 et R_2 se calculent très simplement par les formules dites *d'Olinde Rodrigues*. En désignant par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point (φ, θ), nous avons

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial\theta} + R_1 \frac{\partial c''}{\partial\theta} = 0$$

et

$$(5)\qquad \frac{\partial x}{\partial\varphi} + R_2\frac{\partial c}{\partial\varphi} = 0.$$

Or la direction (c, c', c'') perpendiculaire au plan tangent (1) est telle que

$$\frac{c}{\cos\varphi} = \frac{c'}{\sin\varphi} = \frac{c''}{\cot\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}.$$

J'en déduis, en prenant le signe + devant le radical,

$$(6)\qquad c = \cos\varphi\sin\theta,$$

$$(7)\qquad c' = \sin\varphi\sin\theta,$$

$$(8)\qquad c'' = \cos\theta.$$

Dès lors l'équation (4) peut s'écrire, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial c''}{\partial\theta}$ par leurs expressions tirées des équations (3) et (8) dérivées,

$$(A)\qquad \sin\theta\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta\frac{d\alpha}{d\theta} + R_1 = 0.$$

L'équation (A) nous montre que R_1 est *fonction de* θ *seul*. Calculons R_2. A cet effet, en résolvant les systèmes des équations (1), (2), (3), je tire

$$x = (\alpha+\beta)\cos\varphi - \frac{d\beta}{d\varphi}\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta\sin\theta\frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\left(\alpha + \sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right).$$

D'autre part, en dérivant par rapport à φ l'équation (6),

$$\frac{\partial c}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta.$$

En portant dans l'équation (5) ces expressions de $\frac{\partial x}{\partial\varphi}$

et de $\frac{\partial c}{\partial \varphi}$ j'obtiens pour déterminer R_2 l'équation

$$\left(\alpha + \sin\theta \cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right) + R_2 \sin\theta = 0.$$

Pour que R_2 soit *indépendant de* φ, il faut et il suffit visiblement que $\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}$ soit une constante c_0 :

$$\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = c_0$$

ou, en intégrant et en désignant par c_1 et c_2 deux autres constantes,

$$\beta = c_0 + c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi.$$

Dans ces conditions, les équations (1), (2), (3), qui définissent les coordonnées d'un point de la surface S, peuvent s'écrire

$$(1') \qquad (x - c_1)\cos\varphi + (y - c_2)\sin\varphi = \alpha + c_0 - z\cot\theta,$$

$$(2') \qquad -(x - c_1)\sin\varphi + (y - c_2)\cos\varphi = 0,$$

$$(3') \qquad -\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis immédiatement que

$$\begin{aligned}
&(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 \\
&\quad = (\alpha + c_0 - z\cot\theta)^2 \\
&\quad = \left(\alpha + c_0 + \cot\theta \frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta\right) = \text{fonction de } \theta,
\end{aligned}$$

$$z = -\frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta = \text{fonction de } \theta.$$

z et $\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$ étant fonctions d'une variable θ, leur jacobien est nul, et par conséquent

$$z = F\left[\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}\right].$$

Relation qui caractérise une surface de révolution autour de l'axe $x = c_1$, $y = c_2$ parallèle à Oz.

C. Q. F. D.

4. Pour que R_1 soit égal à $l \operatorname{tang}\theta$ et R_2 à $-l\cot\theta$, il faut que la fonction α satisfasse à la fois aux deux équations suivantes (A′) et (B′), obtenues en remplaçant, dans les équations (A) et (B), R_1, R_2 et β par leurs expressions :

$$(\text{A}') \qquad \sin\theta \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + l \operatorname{tang}\theta = 0,$$

$$(\text{B}') \qquad \frac{d\alpha}{d\theta} \sin\theta\cos\theta + \alpha + c_0 - l\cos\theta = 0.$$

Remarquons tout de suite que ces deux équations ne sont pas incompatibles. Car, si nous dérivons l'équation (B′), nous allons retrouver l'équation (A′). Or l'équation (A′) peut s'écrire

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = -\frac{l\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis, en intégrant et en désignant par $-c_3$ la constante d'intégration,

$$(\text{C}') \qquad \sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta} = l\sin\theta - l\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - c_3.$$

En éliminant $\frac{d\alpha}{d\theta}$ entre (B′) et (C′) j'ai une équation simple qui fournit l'expression de α en fonction de θ

$$\alpha = \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta - c_0.$$

La fonction h est donc déterminée puisque α et β sont calculés

$$h = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi + \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta.$$

5. L'équation du plan tangent à la surface particulière S que nous envisageons est dès lors

$$(x-c_1)\cos\varphi+(y-c_2)\sin\varphi+(z-c_3)\cot\theta = l\cot\theta\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Nous voyons que nous pouvons faire dans cette équation

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

car cela revient à transporter les axes de coordonnées au point (c_1, c_2, c_3). Soit alors par rapport à la nouvelle origine

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\cot\theta = l\cot\theta\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface vérifient cette équation et les deux suivantes :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0,$$

$$-\frac{z}{\sin^2\theta} = -\frac{l}{\sin^2\theta}\int\frac{d\theta}{\cos\theta} + l\frac{\cot\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis très simplement, en résolvant ce système,

$$x = l\cos\varphi\cos\theta,$$

$$y = l\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = l\left(\int\frac{d\theta}{\cos\theta} - \sin\theta\right).$$

J'en déduis

$$(\mathrm{D})\quad\left\{\begin{aligned} dx &= l(-\sin\varphi\cos\theta\,d\varphi - \cos\varphi\sin\theta\,d\theta),\\ dy &= l(\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\,d\theta),\\ dz &= l\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)d\theta = l\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta.\end{aligned}\right.$$

En sorte que l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = l^2(\cos^2\theta\,d\varphi^2 + \tan^2\theta\,d\theta^2).$$

Formule qui peut également s'écrire

$$ds^2 = l^2 \cos^2\theta \left(\frac{d\theta^2}{\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta}} + d\varphi^2 \right).$$

Sous cette forme nous voyons que l'élément considéré est de la forme de l'élément dit *de Liouville*. L'élément de Liouville est, lorsque les paramètres sont u et v, donné par l'équation

$$ds^2 = (U - V)\left(\frac{du^2}{U_1} - \frac{dv^2}{V_1}\right),$$

où U et U_1 sont fonctions de u seul et V et V_1 fonctions de v seul. Toutes les fois que l'élément se présente sous cette forme, la recherche des géodésiques est simple. La relation entre u et v qui définit une géodésique est (Darboux, *Géométrie supérieure, Cours de la Faculté*, 1904-1905), en désignant par a et b deux constantes :

$$b = \int \frac{du}{\sqrt{U_1(U - a)}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V_1(V - a)}}.$$

Dans le cas actuel, cette relation est

$$b = \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2\cos^2\theta - a}} \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{a}}.$$

La quadrature $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}$ se fait très simplement en posant $\cos\theta = t$. Elle est égale à $-\frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{a\cos\theta}$. La relation demandée est donc

$$\text{(R)} \qquad b + \frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{a\cos\theta} = \pm\frac{\varphi}{\sqrt{a}}.$$

Telle est la relation qui définit une géodésique quelconque. Remarquons d'ailleurs que les *méridiens* de la

surface (S) sont aussi des *géodésiques planes*. Leur rayon de courbure, et par conséquent leur courbure, ont été *calculés*.

Calculons la *courbure* et la *torsion* d'une géodésique quelconque et, pour fixer les idées, de la géodésique qui correspond à la relation (R), obtenue en prenant le signe — dans le second membre de la relation (R), en sorte que

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = + \frac{\sqrt{a}\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}.$$

Le calcul est identique avec le signe +.

Adressons-nous aux formules connues en Analyse sous le nom de *formules de Frenet-Serret;* α, β et γ désignant les cosinus des angles que font respectivement avec Ox la tangente, la normale principale et la binormale en un point d'une courbe gauche, et ρ et τ le rayon de courbure et la torsion, nous avons les relations

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{\tau}.$$

Dans le cas actuel, la courbe en question étant une géodésique, son plan osculateur en un point passe par la normale en ce point à la surface S. En sorte que $\beta = c = \cos\varphi\sin\theta$ [équation (6)]. D'autre part

$$\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

De sorte que la première des formules de Frenet peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Or dx est donné par la première des équations (D). D'autre part, en remplaçant dans l'expression de l'élé-

ment ds, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ en fonction de θ, nous trouvons

$$ds = \frac{l^2 \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}.$$

Par conséquent

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{l\sin\theta}\left(\sin\varphi\cos\theta\frac{d\varphi}{d\theta} + \cos\varphi\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{l}\left(\cos\varphi\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} + \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\sin\varphi\right).$$

J'en déduis

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{l}\left(\begin{array}{c} -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \cos\varphi\frac{l^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}\frac{d\theta}{ds} \\ + \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sqrt{a}}{\cos^2\theta}\sin\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{ds} \end{array}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{ds}$ par son expression trouvée ci-dessus et $\frac{d\varphi}{ds}$ par son expression $\frac{\sqrt{a}}{l^2\cos^2\theta}$, j'obtiens après réductions

$$\frac{d^2x}{ds^2} = +\frac{\cos\varphi}{l^3\cos^3\theta}(l^2\cos^4\theta - a).$$

La courbure cherchée $C = \frac{1}{\rho}$ est donc égale à $\frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}$:

$$(9) \qquad \boxed{C = \left|\frac{l^2\cos^4\theta - a}{l^3\cos^3\sin\theta}\right|}.$$

Le calcul de la torsion n'est pas plus compliqué. La binormale étant normale à la fois à la tangente et à la normale principale, droites elles-mêmes orthogonales,

$$\gamma = \frac{c'dz - c''dy}{ds}.$$

En remplaçant c' et c'' par leurs expressions tirées des équations (6) et (7) (n° 3), et dy et dz par leurs expressions tirées de D, nous obtenons

$$\gamma = \frac{\sin\varphi \sin\theta \dfrac{l \sin^2\theta}{\cos\theta} d\theta - l\cos\theta(\cos\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta)}{ds}$$

ou, après réductions,

$$\gamma = l\left(\sin\varphi \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{ds} - \cos\varphi\cos^2\theta\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

ou encore, après avoir remplacé $\frac{d\theta}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{ds}$ par leurs expressions,

$$\gamma = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \sqrt{a}\cos\varphi\right).$$

J'en déduis

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{l}\left(\begin{array}{c}\cos\varphi \dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{\cos\theta} \\ + \sin\varphi \dfrac{-l^2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (l^2\cos^2\theta - a)\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}\dfrac{d\theta}{ds} + \sqrt{a}\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{ds}\end{array}\right)$$

ou, finalement,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \cos\varphi \frac{\sqrt{a}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{l^3\cos^3\theta},$$

et la torsion, donnée par la formule de Frenet, est telle que

$$(10) \qquad \boxed{\frac{1}{\tau} = \left|\frac{\sqrt{a(l^2\cos^2\theta - a)}}{l^3\cos^2\theta\sin\theta}\right|}.$$

Comme vérification, la *courbure* et la *torsion*, données

par les formules (9) et (10), doivent satisfaire à une troisième formule de Serret

$$-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\gamma}{\tau}=\frac{d\beta}{ds}.$$

Cette *vérification* se fait assez simplement.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

Epreuve écrite. — *Soit* C *un cercle fixe dont le centre est à l'origine et* $f(u)$ *une fonction analytique uniforme ne présentant que des singularités isolées dont aucune ne se trouve sur la circonférence* C.

1° *Démontrer que*

$$F(z)=\int e^{uz}f(u)\,du,$$

l'intégrale étant prise sur le cercle C *dans le sens positif, est une fonction entière de* z.

2° *Montrer qu'on peut, sans changer* $F(z)$, *remplacer* $f(u)$ *par une fonction de même nature mais n'ayant, à distance finie, aucune singularité à l'extérieur du cercle* C.

3° *Supposant* $f(u)$ *dans ces conditions et supposant connu le développement*

$$\ldots+A_{-2}u^2+A_{-1}u+A_0+A_1u^{-1}+A_2u^{-2}+\ldots,$$

qui représente $f(u)$ *dans le domaine du point à l'infini, former la série des puissances* $P(z)$ *qui représente* $F(z)$ *dans tout le plan.* $\left(\textit{On utilisera la transformation } u=\frac{1}{v}\cdot\right)$

4° $Q(u)$ *étant un polynome entier donné, de degré* q, *et dont tous les zéros sont à l'intérieur du cercle* C, *on*

considère toutes les fonctions

$$F(z) = \int_C e^{uz} \frac{P(u)}{Q(u)} du,$$

où $P(u)$ *est un polynome entier quelconque. Montrer que, sans restreindre la généralité de ces fonctions, on peut supposer* $P(u)$ *de degré* $q-1$ *au plus. Montrer que ces fonctions* $F(z)$ *vérifient une même équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre* q.

5° *Par l'application du théorème des résidus, trouver l'expression générale explicite des fonctions* $F(z)$ *qui correspondent au polynome donné* $Q(u)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$(x^4-1)\frac{d^2y}{dx^2} - (5x^3+x^2+x+1)\frac{dy}{dx} + 3x(3x^4+x^3+x^2+x+2) = 0.$$

Trouver la courbe intégrale passant par l'origine et admettant ce point comme point d'inflexion.

(Juin 1905.)

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Expliquer, avec démonstration, la marche à suivre pour obtenir une intégrale complète de l'équation*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Appliquer à l'exemple suivant :

$$p = z + xy + q^2.$$

2° a *désignant un nombre réel et positif, déduire de l'intégrale de variable complexe* $\int \frac{e^{iaz^2}\,dz}{1+z^4}$ *prise le long d'un contour convenablement choisi, la valeur de l'intégrale de variable réelle*

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x^2 - \sin a x^2}{1+x^4} dx.$$

Épreuve pratique. — *Une fonction de variable réelle $f(x)$ est définie dans l'intervalle de 0 à 2π par les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{lll} \text{Pour} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots\dots & f(x) = x \\ \text{»} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \dots\dots\dots\dots & f(x) = x^2 \\ \text{»} & \pi < x < \frac{3\pi}{2} \dots\dots\dots & f(x) = x^3 \\ \text{»} & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \dots\dots\dots & f(x) = x^4 \end{array}$$

Calculer les coefficients du développement de $f(x)$ en série trigonométrique

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots$$
$$+ (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \dots.$$

(Juillet 1905.)

Épreuve écrite. — I. *Une surface* S *est définie par les équations*

$$x = a(1 + \cos\theta)\cot\varphi,$$
$$y = a(1 + \cos\theta),$$
$$z = \frac{a \sin\theta}{\sin\varphi}.$$

Calculer en fonction de θ et φ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface S. *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.*

II. *On considère l'intégrale de variable complexe*

$$\int \frac{dz}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}.$$

1° *Calculer cette intégrale le long d'un cercle ayant pour centre l'origine et un rayon supérieur à* 2.

2° *Calculer cette intégrale le long d'une couronne circulaire ayant pour centre l'origine et ayant un rayon supérieur à* 2, *l'autre compris entre* 1 *et* 2.

3° *Déduire du résultat la valeur de l'intégrale réelle,*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}.$$

Épreuve pratique. — *Les deux équations différentielles suivantes :*

$$(1) \qquad x^3(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+1)(2x+5)\frac{dy}{dx} \\ &\qquad + (2x^2+5x-1)y = 0 \end{aligned} \right.$$

ont une solution commune.

Déterminer cette solution et intégrer complètement chacune des équations. (Novembre 1905.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Soient* M *un point de l'espace,* P, Q, R *ses projections sur trois plans coordonnés rectangulaires* OYZ, OZX, OXY; OP′ *la droite symétrique de* OP *par rapport à* OY *et à* OZ, OQ′ *la symétrique de* OQ *par rapport à* OZ *et* OX, OR′ *la symétrique de* OR *par rapport à* OX *et* OY. *Montrer que les droites* OP′, OQ′, OR′ *sont dans un plan* Π; *trouver la surface que doit décrire* M *pour que son plan tangent en* M *soit parallèle au plan* Π.

Réponse : $xyz = C^3$.

II. *On donne dans un plan une famille de cercles ayant un même rayon* R *et passant par un point* O; *déterminer leurs trajectoires orthogonales.*

(Soient C le centre d'un cercle, M l'un de ses points; la tangente à la trajectoire qui y passe, dirigée suivant CM, fait avec OM un angle dont le cosinus est $\frac{dr}{ds} = \frac{x}{4R}$.)

Épreuve pratique. — *Intégrer le système d'équations*

$$\frac{du}{dx} - u + v + w = 2\cos x - \sin x + 3x,$$

$$\frac{dv}{dx} - 2u - 2v - 2w = -2\cos x - 3\sin x - 4x^2,$$

$$\frac{dw}{dx} - u - v + 3w = -\cos x - \sin x - 2x^2 - 3x + 1.$$

[On aura avantage à prendre $u + w$ comme inconnue auxiliaire et l'on trouvera des intégrales de la forme

$$u = (Ax^2 - Bx + C)e^{2x} + \sin x + x^2,$$
$$v = (B - 2A - 2Ax)e^{2x} + \cos x + x^2,$$
$$w = (2A - C + Bx - Ax^2)e^{2x} + x.]$$

(Novembre 1905.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *On donne l'équation*

$$y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + 2x\frac{dy}{dx} = 0:$$

1° *Intégrer cette équation par diverses méthodes et vérifier l'équivalence des résultats;*

2° *Former l'équation différentielle des polaires réciproques des courbes intégrales de l'équation proposée par rapport à la parabole $x^2 = 2y$ et intégrer cette nouvelle équation;*

3° *Vérifier que les courbes ainsi obtenues sont bien les polaires réciproques des premières, par rapport à la parabole considérée.*

Épreuve pratique. — *Calcul de l'aire de la portion de la nappe du cône $z^2 = x^2 - y^2$ située au-dessus du plan xOy qui se projette à l'intérieur de la courbe*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2xy,$$

dans l'angle xOy formé par les directions positives des axes. (Novembre 1905.)

Lille.

Épreuve écrite. — 1° *Définir ce qu'on entend par un théorème d'addition algébrique :*

Déterminer et classer les fonctions d'une seule variable, uniformes, qui admettent un théorème d'addition.

2° *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et un cylindre de révolution autour de* Oz, *trouver sur ce cylindre une courbe* (Γ) *dont les tangentes rencontrent un cercle de centre* O, *situé dans le plan* xOy.

3° *Rectifier un arc de la courbe* (Γ).

4° *Calculer l'aire de la portion de surface conique balayée par le rayon vecteur* OM *quand le point* M *décrit un arc de la courbe* (Γ).

5° *Déterminer une surface passant par la courbe* (Γ) *et coupant orthogonalement les sphères tangentes en* O *au plan* xOy. (Novembre 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite. — 1° *Vérifier que l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0$$

est satisfaite identiquement quand on pose

$$y = 3(t + t^3),$$
$$\frac{dy}{dx} = 3(1 + t^2)(1 + 3t^2).$$

Établir une relation entre x *et* t *et trouver l'intégrale générale de l'équation proposée.*

2° *Peut-on ou ne peut-on pas développer* $\log z$ *en série de Laurent dans une couronne ayant pour centre l'origine?*

Solution de la première question.

(*Voir* le *Cours d'Analyse*, de Goursat, t. II, p. 324.)

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

(Novembre 1905.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Une surface étant représentée, par rapport à des axes rectangulaires, par l'équation*

$$z = f(xy).$$

1° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et ramener leur recherche à des quadratures.*

2° *Appliquer les formules générales et effectuer les quadratures pour la surface*

$$\log z = a\sqrt{xy}.$$

3° *Déterminer la fonction f de façon que l'un des systèmes de lignes asymptotiques se projette sur le plan xOy suivant les courbes*

$$y = cx^n,$$

où c est un paramètre variable, et déterminer le second système de lignes asymptotiques.

Épreuve pratique. — *Un cylindre est représenté par l'équation*

$$y^2 = 2px.$$

Calculer la surface de la portion de ce cylindre qui est intérieure à l'ellipsoïde

$$x^2 + a^2y^2 + z^2 = px\left(2a^2 + \frac{c^2}{2}\right).$$

(Novembre 1905.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$[y(y+1)^2 - 1]\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{2}(y+1)^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2x = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale.*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la parabole définie par les équations*

$$y = 1, \qquad x^2 - 2z = 0.$$

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface* S, *ainsi que la forme générale des projections de ces lignes sur le plan* Oxy.

II. *Déterminer les différents développements suivant les puissances de* z, *en séries de Maclaurin et de Laurent, dont est susceptible la fonction*

$$\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2},$$

selon la valeur de z.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer le volume du solide commun aux deux paraboloïdes représentés en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} - 2z = 0,$$
$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + 2(z-2) = 0.$$

(Novembre 1905.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1246.

(1877, p. 335.)

$a, b, c, \ldots, k$ étant des quantités inégales, on a

$$(\text{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left(\frac{1}{a-b} + \ldots + \frac{1}{a-k} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-k)^2} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

(CATALAN.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation dont les racines sont $a, b, \ldots, k$. On a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k};$$

d'où

$$\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-k} = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{(x-a)f(x)}.$$

Si l'on fait $x = a$, le second membre prend la forme $\frac{0}{0}$. En appliquant deux fois la règle de L'Hospital, on trouve

$$\frac{1}{a-b} + \ldots + \frac{1}{a-k} = \frac{f''(a)}{2f'(a)}.$$

D'autre part,

$$(a-b)\ldots(a-k) = f'(a).$$

La relation à démontrer peut donc s'écrire

$$\sum \frac{f''(a)}{[f'(a)]^3} = 0. \tag{1}$$

Pour l'établir, considérons la fraction rationnelle $\frac{1}{[f(x)]^2}$. Son développement en somme de fractions simples est de la forme

$$\frac{1}{[f(x)]^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a} + \ldots + \frac{K}{(x-k)^2} + \frac{K'}{x-k}. \tag{2}$$

Par l'application de la méthode classique, on trouve

$$A = \frac{1}{[f'(a)]^2},$$

$$A' = \frac{-f''(a)}{[f'(a)]^3},$$

et des valeurs analogues pour B, B', ..., K, K'.

Cela posé, on tire de l'identité (2)

$$1 = A\frac{[f(x)]^2}{(x-a)^2} + \ldots$$
$$+ K\frac{[f(x)]^2}{(x-k)^2} + A'\frac{[f(x)]^2}{x-a} + \ldots + K'\frac{[f(x)]^2}{x-k}.$$

En écrivant que le terme de plus haut degré, dans le second membre, a un coefficient nul, il vient

$$A' + \ldots + K' = 0,$$

ce qui établit la relation (1) et, par suite, l'identité (A) de l'énoncé.

1355.

(1880. p. 566.)

Le volume du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, *qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un tétraèdre donné* ABCD, *a pour expression*

$$V \times \begin{vmatrix} 0 & \cos\eta & \cos\varepsilon & \cos\alpha \\ \cos\eta & 0 & \cos\delta & \cos\beta \\ \cos\varepsilon & \cos\delta & 0 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

en appelant V *le volume du tétraèdre donné et* α, β, γ, δ, ε *et* η *les angles dièdres de ce tétraèdre, le long des arêtes* BC, CA, AB, DA, DB *et* DC *respectivement.* (GENTY.)

SOLUTION

Par M. R. B.

La méthode de Grassmann donne une démonstration rapide de la proposition énoncée.

Désignons par *a*, *b*, *c*, *d* les aires respectives des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Le point A_1 est le barycentre des points B, C, D, affectés respectivement de masses proportionnelles aux aires A_1CD, A_1DB, A_1BC (en tenant compte des signes de ces aires, déterminés d'après les conventions

ordinaires). Or on a, en grandeur et en signe,

$$A_1CD = b\cos\eta, \qquad A_1DB = c\cos\varepsilon, \qquad A_1BC = d\cos\alpha,$$

$$A_1CD + A_1DB + A_1BC = a.$$

On peut donc écrire

$$A_1 = \frac{b}{a}\cos\eta\, B + \frac{c}{a}\cos\varepsilon\, C + \frac{d}{a}\cos\alpha\, D;$$

de même,

$$B_1 = \frac{a}{b}\cos\eta\, A + \frac{c}{b}\cos\delta\, C + \frac{d}{b}\cos\beta\, D,$$

$$C_1 = \frac{a}{c}\cos\varepsilon\, A + \frac{b}{c}\cos\delta\, B + \frac{d}{c}\cos\gamma\, D,$$

$$D_1 = \frac{a}{d}\cos\alpha\, A + \frac{b}{d}\cos\beta\, B + \frac{c}{d}\cos\gamma\, C.$$

On obtient le volume $A_1B_1C_1D_1$ en effectuant le produit progressif des quatre expressions précédentes; on a, en vertu d'un résultat bien connu :

$$A_1B_1C_1D_1 = ABCD \begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{a}\cos\eta & \frac{c}{a}\cos\varepsilon & \frac{d}{a}\cos\alpha \\ \frac{a}{b}\cos\eta & 0 & \frac{c}{b}\cos\delta & \frac{d}{b}\cos\beta \\ \frac{a}{c}\cos\varepsilon & \frac{b}{c}\cos\delta & 0 & \frac{d}{c}\cos\gamma \\ \frac{a}{d}\cos\alpha & \frac{b}{d}\cos\beta & \frac{c}{d}\cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui se réduit bien à l'expression indiquée.

1371.

(1881, p. 383.)

Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *trois diamètres quelconques de trois circonférences ayant* O *pour centre radical;* M *un point quelconque du plan;* OB_1D_1, OB_2D_2, OB_3D_3 *trois triangles symétriquement semblables à* OMA_1, OMA_2, OMA_3 *respectivement : démontrer que les trois points* D_1, D_2, D_3 *sont en ligne droite.* (LAISANT.)

SOLUTION

Par M. THIE.

Ce problème se traite aisément par la méthode des équipollences.

Désignons par a_1, b_1, ..., m les affixes des points A_1, B_1, ..., M, le point O étant pris pour origine.

Soit, en général, x' l'imaginaire conjugué de x. Les conditions de l'énoncé se traduisent, comme il est bien connu, par les relations

$$a_1 b'_1 + b_1 a'_1 = a_2 b'_2 + b_2 a'_2 = a_3 b'_3 + b_3 a'_3.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{a'_1}{m'} \qquad \text{ou} \qquad d_1 = \frac{b_1 a'_1}{m}$$

et de même

$$d_2 = \frac{b_2 a'_2}{m}, \qquad d_3 = \frac{b_3 a'_3}{m}.$$

On en conclut immédiatement que les trois points, dont les affixes sont md_1, md_2, md_3, satisfont aux relations

$$md_1 + (md_1)' = md_2 + (md_2)' = md_3 + (md_3)'.$$

Ces trois points sont donc sur une même droite, perpendiculaire à Ox. Les trois points D_1, D_2, D_3, qui forment une figure semblable à celle que forment les trois points md_1, md_2, md_3, sont donc aussi en ligne droite. C. Q. F. D.

1418.

(1882, p. 384.)

Soient

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = R$$

et α_{ik} *le coefficient de* a_{ik} *dans* R. *Si l'on désigne par* D

le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm a_{11} & a_{12} \pm a_{21} & \dots & a_{1n} \pm a_{n1} \\ a_{21} \pm a_{12} & a_{22} \pm a_{22} & \dots & a_{2n} \pm a_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} \pm a_{1n} & a_{n2} \pm a_{2n} & \dots & a_{nn} \pm a_{nn} \end{vmatrix},$$

et par Δ *le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans* D *les quantités* a_{ik} *par* α_{ik}, *on aura*

$$\Delta = R^{n-2} D.$$

(E. HUNYADY.)

SOLUTION

Par un ABONNÉ.

J'ai corrigé une erreur évidente dans la première colonne du déterminant D.

Si l'on désigne par ρ le déterminant des α_{ik}, on a

$$R^{n-1} = \rho;$$

la relation à démontrer devient

$$R\Delta = \rho D.$$

Faisons, pour abréger l'écriture, $n = 3$. Nous devons démontrer l'égalité des deux produits

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha \pm \alpha & \beta \pm \alpha' & \gamma \pm \alpha'' \\ \alpha' \pm \beta & \beta' \pm \beta' & \gamma' \pm \beta'' \\ \alpha'' \pm \gamma & \beta'' \pm \gamma' & \gamma'' \pm \gamma'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a \pm a & b \pm a' & c \pm a'' \\ a' \pm b & b' \pm b' & c' \pm b'' \\ a'' \pm c & b'' \pm c' & c'' \pm c'' \end{vmatrix}.$$

Le premier produit, effectué en combinant les *lignes* des deux déterminants pour former celles du déterminant produit, est

$$\begin{vmatrix} R \pm (a\alpha + b\alpha' + c\alpha'') & \pm(a\beta + b\beta' + c\beta'') & \pm(a\gamma + b\gamma' + c\gamma'') \\ \pm(a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'') & R \pm (a'\beta + b'\beta' + c'\beta'') & \pm(a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'') \\ \pm(a''\alpha + b''\alpha' + c''\alpha'') & \pm(a''\beta + b''\beta' + c''\beta'') & R \pm (a''\gamma + b''\gamma' + c''\gamma'') \end{vmatrix}.$$

Ce second produit, effectué en combinant les *colonnes* des deux déterminants pour former celles du déterminant produit, est identique au premier.

1632.

(1892, p. 14*.)

Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver une ligne plane dont les cercles osculateurs soient vus sous un angle constant d'un point du plan. (E. Cesàro.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Soit C une courbe telle que tous ses cercles osculateurs soient vus d'un point O sous un angle constant. Si m est un point quelconque de C, μ le centre de courbure en ce point, on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{O\mu}{m\mu} = \text{const.}$$

Mais $m\mu$ est égal à l'arc de la courbe Γ, développée de C, compté à partir d'une origine convenable. La courbe Γ jouit donc de cette propriété que l'arc de cette courbe, compris entre un certain point fixe et le point variable μ, est proportionnel à $O\mu$.

On en conclut facilement que Γ est une spirale logarithmique de pôle O. La courbe C, développante de Γ, est aussi une spirale logarithmique de pôle O. Mais la constante qui figure dans le premier membre de l'égalité (1) est nécessairement inférieure à l'unité; autrement dit, *le point* O *est intérieur à tous les cercles osculateurs de* C : l'angle, sous lequel on voit de ce point les cercles en question, est bien constant, mais il est imaginaire.

1662.

(1894, p. 2*.)

Démontrer que la clothoïde [1] *est la seule courbe*

---

[1] Ligne dont la courbure varie proportionnellement à l'arc. Voir *Nouvelles Annales*, 1886, p. 512.

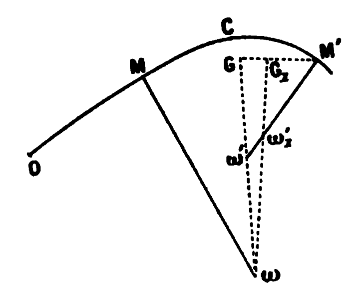
jouissant de la propriété suivante : le barycentre d'un arc quelconque est en ligne droite avec les centres de courbure aux points extrêmes. (CESÀRO.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient C une courbe satisfaisante, M et M' deux points quelconques de cette courbe, G le barycentre de l'aire MM', ω et ω' les centres de courbure en M et en M'. Soient encore M" un point (non représenté sur la figure) infiniment voisin de M', G_1 le centre de gravité de l'arc MM'_1, ω'_1 le centre de courbure en M'_1.

Appelons S et S' les arcs OM et OM', O étant une origine



quelconque sur C, R et R' les rayons de courbure $M\omega$, $M'\omega'$, dS' l'arc infiniment petit M'M".

G_1 est le barycentre de deux masses, l'une, S, appliquée en G, l'autre, dS, appliquée en M'. G_1 est donc sur GM', et l'on a

$$\frac{G_1G}{G_1M'} = -\frac{dS'}{S'-S}.$$

ω'_1 est sur $\omega'M'$, et l'on a

$$\frac{\omega'_1\omega'}{\omega'_1M'} = \frac{dR'}{R'+dR'} = \frac{dR'}{R'},$$

en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur. Cela posé,

les trois points ω, ω'_1, G sont en ligne droite; de même, les trois points ω, ω'_1, G_1.

On a donc, par le théorème des transversales,

$$\frac{G_1 G}{G_1 M'} \frac{\omega'_1 M'}{\omega'_1 \omega'} \frac{\omega\omega'}{\omega G} = 1$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dS'}{dR'} \frac{R'}{S' - S} = - \frac{\omega G}{\omega\omega'}.$$

Nous avons obtenu cette relation en supposant que l'on fait varier le point M, le point M' restant fixe. Faisons maintenant le contraire.

On formera d'une manière toute semblable la relation

$$(2) \qquad \frac{dS}{dR} \frac{R}{S - S'} = - \frac{\omega' G}{\omega' \omega} = \frac{\omega' G}{\omega\omega'}.$$

On tire des relations (1) et (2)

$$\frac{dS}{dR} \frac{R}{S - S'} + \frac{dS'}{dR'} \frac{R'}{S' - S} = -1$$

ou

$$R \frac{dS}{dR} - R' \frac{dS'}{dR'} = S' - S$$

ou enfin

$$R \frac{dS}{dR} + S = R' \frac{dS'}{dR'} + S'.$$

Le premier membre est fonction de S seulement, le deuxième de S' seulement. Leur valeur commune est, par suite, une constante a.

Soit donc

$$R \frac{dS}{dR} + S = a$$

ou

$$R(S - a) = K.$$

On reconnaît là l'équation intrinsèque de la clothoïde.

Quant à la réciproque, on peut la démontrer au moyen des formules contenues dans l'article cité plus haut (dont l'auteur est M. Cesàro).

1742.

(1896, p. 392.)

Trouver toutes les courbes telles que, pour chacune d'elles, le lieu du centre de gravité des arcs comptés à partir d'une même origine coïncide avec la développée.

(Th. Caronnet.)

SOLUTION

Par M. Thiè.

Soient OM un arc de courbe compté à partir d'une certaine origine, G le centre de gravité de cet arc.

On sait que la tangente en G à la courbe (G) passe par le point M.

D'autre part, si (G) coïncide avec la développée de la courbe (M), c'est que cette même tangente est normale à (M) en un certain point M'.

Je supposerai que M *et* M' *coïncident.*

Le cas où il en serait autrement serait évidemment beaucoup plus difficile à traiter.

Soient donc M et M_1 deux points infiniment voisins sur (M), G et G_1 les centres de gravité correspondants : G et G_1 sont les centres de courbure, en M et en M_1, de la courbe (M). On doit avoir la relation

$$\frac{G_1 G}{G_1 M_1} = -\frac{MM_1}{\text{arc}\, OM}.$$

Posons

$$\text{arc}\, OM = s,$$

$$GM = \rho.$$

L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{ds}{s}.$$

D'où

$$s\rho = \text{const.}$$

Cette équation intrinsèque définit, on le sait, une *clothoïde*.

1752.

(1896, p. 543.)

Démontrer que toute équation différentielle de la forme

$$f\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2},\ x\frac{dy}{dx},\ y\right)=0,$$

où f désigne une fonction homogène de trois variables, peut s'intégrer au moyen de deux quadratures.

Appliquer à l'exemple suivant

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-ay\frac{dy}{dx}=0,$$

où a désigne une constante. (C. Bourlet.)

SOLUTION

Par M. R. B.

L'équation proposée peut s'écrire

$$(1)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=y\,\varphi\left(\frac{x\dfrac{dy}{dx}}{y}\right),$$

φ étant une fonction quelconque. Posons

$$(2)\qquad t=x\frac{dy}{dx}.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{x},$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dt}{dx}-t=x\frac{dt}{dy}\,\frac{dy}{dx}-t=t\frac{dt}{dy}-t.$$

L'équation (1) devient donc

$$t\frac{dt}{dy} - t = y\,\varphi\left(\frac{t}{y}\right)$$

ou

(3) $$\frac{dt}{dy} = 1 + \frac{y}{t}\,\varphi\left(\frac{t}{y}\right).$$

Cette équation différentielle du premier ordre, homogène entre t et y, s'intègre, comme on le sait, au moyen d'une quadrature. On tirera ensuite x de l'équation (2), par la formule

$$x = e^{\int \frac{dy}{t}}.$$

En appliquant cette méthode à l'exemple proposé, on trouvera sans peine comme solution générale

$$y = \frac{K}{K' x^{a+1} + 1},$$

où K et K' sont deux constantes arbitraires.

QUESTIONS.

2027. Le lieu du centre des ellipses surosculatrices en chaque point d'une ellipse donnée, et ayant une aire constante, est une ellipse. (E.-N. Barisien.)

2028. Dans un cercle de centre O et de rayon R, soient AB, BC, CD trois côtés consécutifs du polygone régulier inscrit de 14 côtés. On projette D sur OA, OB, OC, respectivement en E, F, G. Démontrer la relation

$$DE + DF - DG = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

(E.-N. Barisien.)

2029. On projette un point M d'une ellipse en P et Q sur les diamètres conjugués égaux. Montrer que le milieu I de PQ est situé sur la normale à l'ellipse en M, et que le point de Frégier relatif à M est le symétrique de M par rapport à I.

(E.-N. Barisien.)

2030. L'antipodaire d'une ellipse par rapport à un des sommets du grand axe est une quartique : l'antipodaire de la même ellipse par rapport à un des sommets du petit axe est une autre quartique. Montrer que ces deux quartiques ont même aire, équivalente aux $\frac{4}{3}$ de l'aire de la développée de l'ellipse. (E.-N. Barisien.)

2031. Démontrer la relation

$$\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)} + \sum \frac{1}{f(\alpha)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

et la seconde somme à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

$f'(x)$ et $f''(x)$ désignent les dérivées première et seconde du polynome $f(x)$. (R. Bricard.)

ERRATUM.

Page 414, ligne 15, *au lieu de :* avait, *lire :* aurait.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME V, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

J. — Analyse combinatoire; calcul des probabilités; calcul des variations; théorie générale des groupes de transformations; théorie des ensembles de M. Cantor.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; géométrie descriptive; perspective.

L. — Coniques et surfaces du second degré.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

S. — Mécanique des fluides; Hydrostatique; Hydrodynamique; Thermodynamique.

X. — Procédés de calcul; Tables; Nomographie; calcul graphique; planimètres; instruments divers.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME V, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

36225 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

HOÜEL (**J.**). — **Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire**, ou **Commentaire sur les 32 premières propositions des Eléments d'Euclide.** 2e éd. in-8. avec fig.; 1885. 2 fr. 50 c.

JOUFFRET (**E.**), Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite, ancien Élève de l'Ecole Polytechnique. — **Traité de Géométrie à quatre dimensions et Introduction à la Géométrie à** *n* **dimensions.** Grand in-8 de xxv-261 pages avec 65 figures; 1903........................ 7 fr. 50 c.

LACROIX (**S.-F.**) Membre de l'Institut. — **Éléments de Géométrie,** suivis de *Notions sur les courbes usuelles*. 25e édition, conforme aux *Programmes* de l'enseignement scientifique des Lycées, revue et corrigée par *Prouhet,* Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. In-8, avec 220 figures dans le texte; 1897. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Ecoles publiques est autorisée par décision ministérielle.*)........................ 4 fr.

LAGUERRE, Membre de l'Institut. — **Recherches sur la Géométrie de direction.** *Méthodes de transformation. Anticaustiques.* In-8; 1885.. 2 fr.

LAQUIÈRE, ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Géométrie de l'Échiquier**: Solution régulière du problème d'Euler sur la marche du cavalier; Considérations numériques sur une série de solutions semi-régulières. Grand in-8; 1880........................ 2 fr.

LAURENT (**Hermann**), Examinateur à l'École polytechnique. — **Sur les Principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie.** In-8 écu (20 × 13) de 68 pages, cartonné (*C. S.*); 1901. 2 fr.

LECHALAS (**Georges**), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Introduction à la Géométrie générale.** In-16 (19 × 12) de IX-65 pages avec 5 figures; 1904........................ 1 fr. 75 c.

MANNHEIM (Colonel **A.**), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et développements de la Géométrie cinématique.** *Ouvrage contenant de nombreuses applications à la Théorie des surfaces.* In-4 avec 86 figures, 1894........................ 25 fr.

MANNHEIM (**A.**), Lieutenant d'Artillerie. — **Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques.** In-8, avec figures dans le texte; 1857....... 2 fr. 50 c.

OCAGNE (**Maurice d'**), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Coordonnées parallèles et axiales.** *Méthode de transformation géométrique* et *procédé nouveau de calcul graphique* déduits de la considération des coordonnées parallèles. In-8, avec figures et 1 planche; 1885........................ 3 fr.

PIONCHON (**J.**), Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut électrotechnique de l'Université de Grenoble. — **Notions fondamentales sur l'évaluation numérique des grandeurs géométriques.** Grand in-8 de 128 pages, avec 54 figures; 1903........... 3 fr. 50

TABLE DES MATIÈRES.

Décembre 1905.

Page

36225 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.




3 2044 102